線形制御理論 練習問題 6

2013 年 5 月 24 日（金）

次の微分方程式の解 $y(t)$ が $t \to \infty$ で収束するか発散するかを調べよ．

1. $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 1$, $t \geq 0$. ただし $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.
2. $\dddot{y}(t) - y(t) = 1$, $t \geq 0$. ただし $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$.

解答例

1. 時間関数 $y(t)$ の Laplace 変換を $Y(s)$ とおく．また $u(t) = \mathbf{1}(t)$（単位ステップ関数）とおき，その Laplace 変換を $U(s)$ とおく（すなわち，$U(s) = 1/s$）．このとき，微分方程式の両辺を Laplace 変換すると

$$(s^2 + s + 1)Y(s) = U(s).$$

これより，

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}U(s)$$

が得られる．したがって，伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

であり，微分方程式の解は伝達関数 $G(s)$ を持つシステムのステップ応答である．伝達関数 $G(s)$ の極を求めると，

$$\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

であり，極の実部はともに $-1/2$ で負となることがわかる．したがって，ステップ応答 $y(t)$ は $t \to \infty$ で収束する．

2. 上の 1. と同様にして伝達関数を求めると

$$G(s) = \frac{1}{s^3 - 1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

が得られる．伝達関数 $G(s)$ の極のうち一つは 1 であり正であるので，解は $t \to \infty$ で発散することがわかる．

$\square$