線形制御理論 練習問題 5

2013 年 5 月 17 日（金）

次の微分方程式を考える．

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + ky(t) = u(t), \quad t \geq 0.$$

ただし，$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ とし，$m > 0$, $d > 0$, $k > 0$ とする．次の問いに答えよ．

1. 伝達関数 $G(s)$ を求めよ．
2. $G(s)$ の減衰係数 ζ，自然角周波数 ω_n およびゲイン K を求めよ．

解答例

1. 時間関数 $y(t)$ と $u(t)$ の Laplace 変換をそれぞれ $Y(s)$, $U(s)$ とおく．微分方程式の両辺を Laplace 変換すると，

$$(ms^2 + ds + k)Y(s) = U(s)$$

が得られる．これより，

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}U(s).$$

したがって，伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}$$

となる．

2. 伝達関数を変形すると

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}.$$

これより，

$$K\omega_n^2 = \frac{1}{m}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{d}{m}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

したがって，$G(s)$ の減衰係数 ζ，自然角周波数 ω_n およびゲイン K は，

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad K = \frac{1}{k}$$

となる． $\square$