線形制御理論 練習問題 3

2013 年 4 月 26 日（金）

次の微分方程式の解の定常値を求めよ．

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

ただし，$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ とし，$LC = 2$, $RC = 3$ とする．

解答例

微分方程式の両辺を Laplace 変換し整理すると，

$$Y(s) = \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{(2s+1)(s+1)s}$$

が得られる．ここで，

$$\frac{1}{(2s+1)(s+1)s} = \frac{a}{2s+1} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s}$$

とおくと，

$$a = \left.\frac{1}{(s+1)s}\right|_{s=-\frac{1}{2}} = -4, \quad b = \left.\frac{1}{(2s+1)s}\right|_{s=-1} = 1, \quad c = \left.\frac{1}{(2s+1)(s+1)}\right|_{s=0} = 1.$$

したがって，

$$Y(s) = -\frac{4}{2s+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}.$$

これを逆 Laplace 変換すれば，微分方程式の解

$$y(t) = -2e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t} + 1, \quad t \geq 0$$

が得られる．ここで，$t \to \infty$ のとき $e^{-\frac{1}{2}t} \to 0, e^{-t} \to 0$ となるので，$y(t)$ の定常値は

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 1$$

となることがわかる．□

別解

この練習問題を出題した段階では，Laplace 変換の最終値の定理はやっていなかったので，上記のような解答例になったが，最終値の定理を使えば，次のように簡単に定常値を求めることができる．

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(2s+1)(s+1)} = 1.$$