線形制御理論 練習問題 2

2013 年 4 月 19 日（金）

次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

ただし，$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ とする．

解答例

時間関数 $x(t)$ の Laplace 変換を $X(s)$ とおくと，$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ より，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - 1,$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s).$$

これを用いると，微分方程式の左辺の Laplace 変換は

$$s^2X(s) - 1 + 5sX(s) + 4X(s) = (s^2 + 5s + 4)X(s) - 1$$

となり，また微分方程式の右辺の Laplace 変換は 0 なので，次の等式

$$(s^2 + 5s + 4)X(s) - 1 = 0.$$

が成り立つ．これより，

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{(s+1)(s+4)}.$$

ここで，

$$\frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+4}$$

とおくと，

$$a = \left. \frac{1}{s+4} \right|_{s=-1} = \frac{1}{3}, \qquad b = \left. \frac{1}{s+1} \right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}.$$

したがって，

$$X(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right).$$

これを逆 Laplace 変換すると，微分方程式の解

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t} \right), \quad t \geq 0$$

が得られる． $\square$