線形制御理論 練習問題 13

2013 年 7 月 12 日（金）

制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

に対して，制御器を

$$K(s) = k \in \mathbb{R}$$

とおく．一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ の Nyquist 線図を描き，フィードバック系が内部安定であるための k の範囲を求めよ．フィードバック系を内部安定にする k の範囲を求めよ．

解答例

一巡伝達関数

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{k}{s-1}$$

より，に対して，

$$L(j\omega) = \frac{k}{j\omega - 1}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

となる．これより，任意の $\omega \in \mathbb{R}$ に対して

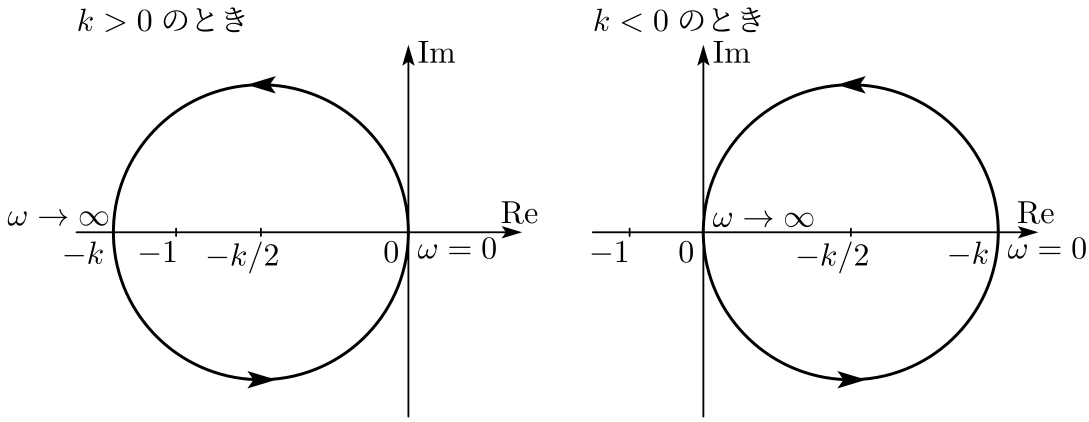
$$\left| L(j\omega) + \frac{k}{2} \right| = \left| \frac{k}{j\omega - 1} + \frac{k}{2} \right| = \frac{|k|}{2} \cdot \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \right| = \frac{|k|}{2}$$

が成り立つ．すなわち，s が Nyquist 経路の虚軸上 $(s = j\omega,\, \omega \in \mathbb{R})$ を動くとき，$L(s)$ は中心 $-k/2$，半径 $|k|/2$ の円を描く．

また，s が Nyquist 経路の半径 R の半円 ($s = Re^{j\theta}$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) を動くとき，

$$|L(Re^{j\theta})| = \left| \frac{k}{Re^{j\theta} - 1} \right| = \frac{|k|}{\sqrt{(R\cos^2\theta - 1)^2 + R^2\sin^2\theta}}.$$

これより，$R \to \infty$ で $L(Re^{j\theta}) \to 0$ となることがわかる．以上より，$L(s)$ の Nyquist 線図は以下のようになる．今，$L(s)$ は実部が正の極 ($s = 1$) を一つ持つので，Nyquist の



安定定理より，安定であるための必要十分条件は，Nyquist 線図が点 -1 を 1 回転することである．上で描いた Nyquist 線図より，フィードバック系が内部安定であるための必要十分条件は，

$$k > 1$$

であることがわかる．