数値計算

大阪大学基礎工学部

永原正章

2012年5月24日(5限)

休講と補講のお知らせ⋆⋆⋆

下記の2回休講します.

- 6月21日(木)
- 7月12日(木)

講義室の変更および補講:

- 6月14日(木)→ 5限 (B102)・6限 (B102)
- 7月5日(木)→ 5限 (B102)・6限 (B102)

反復法の収束性解析と誤差解析

- 非線形方程式

$$f(x) = 0$$

- $x = \phi(x)$ の形に等価変形
- 反復法

$$x[n+1] = \phi(x[n]), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- 反復法の収束性(収束するかどうか)?

方程式 $x = \cos(x)$

- 厳密解は

$$x = 0.739085133215160641\ldots$$

- 関数電卓で簡単に求まる

方程式 $\mathsf{x} = \cos(\mathsf{x})$

- 厳密解は

$$\mathsf{x} = 0.739085133215160641\ldots$$

- 関数電卓で簡単に求まる
- 反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \cos(\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathsf{x}[0] = 1.$$

縮小写像⋆⋆⋆

- N次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の閉部分集合 K 上で定義された写像 ϕ が次の条件を満足するとき, ϕ を K における **縮小写像** と呼ぶ.
  1. 任意の $x \in K$ に対して $\phi(x) \in K$.
  2. ある q ($0 \le q < 1$)が存在して,任意の $x, y \in K$ に対して

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \le q\|x - y\|. \tag{1}$$

- ただし,$x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^\top$ に対し,

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$$

- 不等式 (1) を **Lipschitz 条件**, 定数 q を **Lipschitz 定数** と呼ぶ.

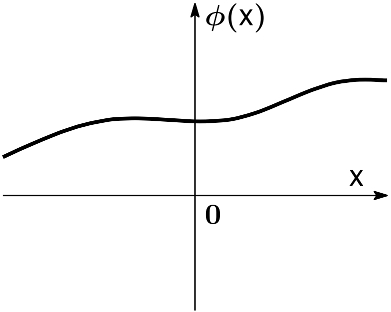
縮小写像

- ϕ が縮小写像なら,ある q $(0 \le q < 1)$ が存在して

$$G := \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \frac{\|\phi(x) - \phi(y)\|}{\|x - y\|} \le q < 1$$

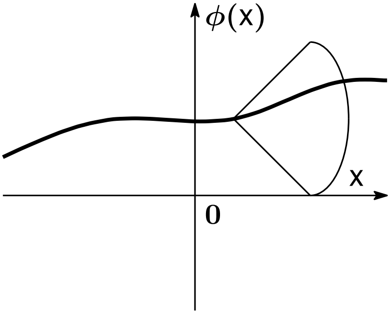
  が成り立つ.
- G は ϕ の変化率の最大値をあらわす.
- 縮小写像 ϕ は“あまり変化しない関数”であるといえる.
- ϕ を“システム”と考えると, G はシステム ϕ の増分ゲインと呼ばれる量である.

縮小写像



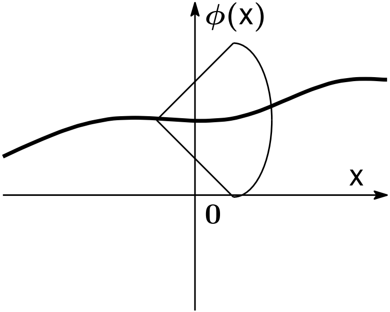
- 縮小写像 = あまり変化しない写像

縮小写像



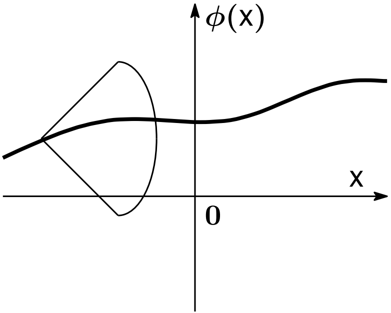
- 傾き ± 1 の“扇” をあてはめるとどの位置でもその扇の中に関数がある

縮小写像



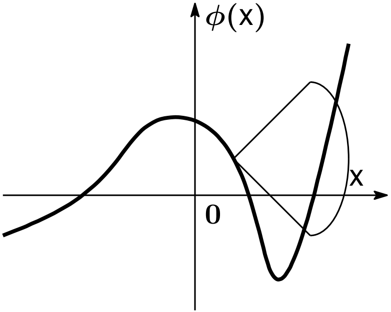
- 傾き ± 1 の“扇” をあてはめるとどの位置でもその扇の中に関数がある

縮小写像



- 傾き ± 1 の"扇" をあてはめるとどの位置でもその扇の中に関数がある

縮小写像でない例



- 傾き ± 1 の“扇” からはみ出る
- 変化が“激しい”

不動点

- 閉集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ 上で定義された写像 $\phi : K \to K$ に対して

$$x^* = \phi(x^*)$$

を満たす $x^* \in K$ を写像 ϕ の不動点と呼ぶ.

- 点 x^* に写像 ϕ をほどこしても動かない.すなわち,不動点.

不動点定理(縮小写像の原理)

- K: $\mathbb{R}^{N}$ の閉部分集合
- 写像 ϕ: K における縮小写像

と仮定すると,以下が成り立つ.

1. 写像 ϕ は K に唯一つの不動点 x^* を持つ.
   - 言い換えると,方程式 $x = \phi(x)$ は K に唯一つの解 x^* を持つ.
2. 任意の $x[0] \in K$ を初期値とする反復法

$$x[n+1] = \phi(x[n]), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

によって生成されるベクトル列 $\{x[n]\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = x^*$$

が成り立つ.すなわち,任意の初期値 $x[0] \in K$ に対して, 反復法は厳密解 x^* に収束する.

不動点定理の証明

次の順序で証明する.

1. ベクトル列 $\{x[n]\}$ が K 内で収束する.すなわち, 任意の $n \geq 0$ に対して $x[n] \in K$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} x[n] =: \alpha \in K.$$

2. 上の収束先 α が $\alpha = \phi(\alpha)$ を満たす.すなわち,$\alpha = x^*$.
3. 解の一意性

解の一意性

- x^*, y^* を方程式 $x = \phi(x)$ の解とする.

$$x^* = \phi(x^*), \quad y^* = \phi(y^*)$$

- ϕ は縮小写像より

$$\|x^* - y^*\| = \|\phi(x^*) - \phi(y^*)\| \leq q\|x^* - y^*\|$$

- $0 \leq q < 1$ であるから $\|x^* - y^*\| = 0$ でなければならない.
- すなわち,$x^* = y^*$.

$\square$

縮小写像の例

- 写像 $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を

$$\phi(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

とする.ただし,A は $n \times n$ の行列であり,

$$\lambda_{max}(A^\top A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(A^\top A)| < 1$$

を満たすとする. このとき,ϕ は $\mathbb{R}^N$ 上の縮小写像となる.

縮小写像の例

1. 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して,$\phi(x) = Ax \in \mathbb{R}^N$.
2. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\begin{aligned}\|\phi(x) - \phi(y)\|_2^2 &= \|A(x-y)\|_2^2 \\ &= (x-y)^\top A^\top A(x-y) \\ &\le \lambda_{\max}(A^\top A)(x-y)^\top (x-y) \\ &= \lambda_{\max}(A^\top A)\|x-y\|_2^2\end{aligned}$$

よって,$q = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$ とすれば,任意の$x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_2 \le q\|x-y\|_2$$

すなわち,ϕ は $\mathbb{R}^N$ 上の縮小写像である.

1変数の縮小写像$\star\star\star$

補題1(縮小写像の十分条件)
関数 ϕ は $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で C^1級とする.このとき, ある $q \in [0,1)$ が存在して,任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$|\phi'(x)| \leq q$$

が成り立つならば,任意の $y, z \in [a,b]$ に対して

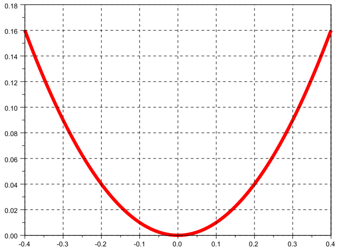
$$|\phi(y) - \phi(z)| \leq q|y - z|$$

が成り立つ.

例題⋆ ⋆ ⋆

次の写像 ϕ が領域 $\mathsf{K} \in \mathbb{R}$ の縮小写像であることを示せ.

$$\phi(\mathsf{x}) = 2\mathsf{x}^2, \quad \mathsf{K} = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right].$$



解答例$\star\star\star$

- 任意の $x \in K = [-1/5, 1/5]$ に対して,

$$|\phi(x)| = |2x^2| \leq \frac{2}{25} < \frac{1}{5}$$

したがって,$\phi(x) \in K = [-1/5, 1/5]$ であることがわかる.

- 任意の $x \in [-1/5, 1/5]$ に対して,

$$|\phi'(x)| = |4x| \leq 4/5 < 1$$

したがって,補題1より, 任意の $x, y \in [-1/5, 1/5]$ に対して,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{4}{5}|x - y|$$

が成り立つ.

以上より,ϕ は K 上の縮小写像である.

練習問題

次の各写像 ϕ が領域 K の縮小写像であることを示せ.

1. $\phi(x) = \frac{1}{2}x, \quad K = (-\infty, \infty)$
2. $\phi(x) = \cos x, \quad K = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

(ヒント) 次の2つを示せ.

- 任意の $x \in K$ に対して $\phi(x) \in K$.
- ある $q \in [0, 1)$ が存在して,任意の $x, y \in K$ に対して

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq q\|x - y\|.$$

練習問題の解答 [1]

- 任意の $x \in K = (-\infty, \infty)$ に対して,明らかに $\phi(x) = x/2 \in K$.
- 任意の $x, y \in K$ に対して,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \left|\frac{1}{2}(x-y)\right| = \frac{1}{2}|x-y|$$

ゆえに,$q = 1/2$ とすれば,任意の $x, y \in K$ に対して,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq q|x-y|$$

が成り立つ.

以上より,ϕ は K 上の縮小写像である.

練習問題の解答 [2]

- 任意の $x \in K = [0, \pi/3]$ に対して,

$$\phi(x) = \cos x \in (0, 1] \subset K = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

- 任意の $x \in K = [0, \pi/3]$ に対して,

$$|\phi'(x)| = |\sin x| \leq \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

したがって,補題1より, 任意の $x, y \in [0, \pi/3]$ に対して,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|x - y|$$

が成り立つ.

以上より,ϕ は K 上の縮小写像である.

1変数の反復法

- 方程式 $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0$
- $\phi(\mathsf{x}) = \mathsf{x} - \mathsf{f}(\mathsf{x})$ とおくと,$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi(\mathsf{x}) = \mathsf{x}$
- 反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \mathsf{x}[\mathsf{n}] - \mathsf{f}(\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots$$

- 上の反復法が収束するための写像 f の条件は?

微分可能な写像の不動点定理

実関数 $f(x)$ は,閉区間 $[a, b]$ 上でC^1級とし,また 任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$a \leq x - f(x) \leq b$$

$$0 < f'(x) < 2$$

が成り立つとする. このとき

- $f(x) = 0$ の解 x^* が $[a, b]$ 内に唯一つ存在する.
- $x[0] \in [a, b]$ を初期値とする反復法

$$x[n+1] = x[n] - f(x[n]), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

は x^* に収束する.