数値計算

大阪大学基礎工学部

永原正章

2012年5月17日(5限)

休講と補講のお知らせ$\star\star\star$

下記の2回休講します.

- 6月21日(木)
- 7月12日(木)

講義室の変更および補講:

- 6月14日(木)$\rightarrow$ 5限 (B102)・6限 (B102)
- 7月5日(木)$\rightarrow$ 5限 (B102)・6限 (B102)

非線形方程式の反復解法

- 非線形方程式

$$f(x) = 0$$

を満たす x を求めよ.

- 例えば $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき,厳密解

$$x^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が求まる.

非線形方程式の反復解法

- しかし,例えば f(x) が5次以上の方程式の場合, 上記のように簡単には厳密解を求めることは不可能.
- 反復法

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}+1]=\phi(\mathrm{x}[\mathrm{n}]), \quad \mathrm{n}=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots$$

により近似解を求める.

  - 写像 $\phi(\mathrm{x})$ と初期値 $\mathrm{x}[0]$ をうまく選んで,n $\to\infty$ のときにx[n] $\to$ x* となるようにすれば良い.

非線形方程式の反復解法

1. 方程式 $f(x) = 0$ を $x = \phi(x)$ の形に等価変形する.
2. 初期値 $x[0]$ を選ぶ.
   - 解のおおよその数値がわかっている場合には,それに近い値に設定する.
3. 十分大きな N をとり,反復法

$$x[n+1] = \phi(x[n]), n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

   を実行する.
4. 得られた $x[N+1]$ を方程式 $f(x) = 0$ の近似解とする.

反復法はなぜうまくいくのか?

- 反復法

$$x[n+1] = \phi(x[n]), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

が $a \in \mathbb{R}$ に収束したとする.すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = a \in \mathbb{R}$$

とする.

- また,$\phi(x)$ は $x = a$ で連続と仮定する.
- このとき,

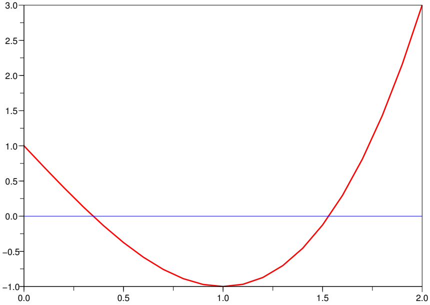
$$a = \lim_{n\to\infty} x[n+1] = \lim_{n\to\infty} \phi(x[n]) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} x[n]\right) = \phi(a)$$

- すなわち,$\phi(a) = a \Leftrightarrow f(a) = 0$.

例題

- 次の方程式の解を一つ求める.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$



- $0 < x < 1$ と $1 < x < 2$ の区間に一つづつ解が存在.

例題

- 方程式 $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ に対する反復法

$$
\begin{aligned}
(1) \quad x &= \frac{1}{3}\left(x^3 + 1\right) = \phi(x) \\
(2) \quad x &= \frac{3x - 1}{x^2} = \phi(x)
\end{aligned}
$$

反復法(1)

- 初期値を $\mathsf{x}[0] = 0.5$ とし,反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \frac{1}{3}\left(\mathsf{x}[\mathsf{n}]^3 + 1\right), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots$$

を実行.

反復法(1)

```
x[0] = 0.500000
x[1] = 0.375000
x[2] = 0.350911
x[3] = 0.347737
x[4] = 0.347350
x[5] = 0.347303
x[6] = 0.347297
x[7] = 0.347296
x[8] = 0.347296
x[9] = 0.347296
x[10] = 0.347296
x[11] = 0.347296
x[12] = 0.347296
x[13] = 0.347296
x[14] = 0.347296
x[15] = 0.347296
x[16] = 0.347296
x[17] = 0.347296
x[18] = 0.347296
x[19] = 0.347296
```

- 区間 $(0, 1)$ の解に収束.

反復法(1)

- 初期値を $\mathsf{x}[0] = \mathbf{2}$ とし,反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \frac{1}{3}\left(\mathsf{x}[\mathsf{n}]^3 + 1\right), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots$$

を実行.

反復法(1)

```
x[0] = 2.000000e+000
x[1] = 3.000000e+000
x[2] = 9.333333e+000
x[3] = 2.713457e+002
x[4] = 6.659590e+006
x[5] = 9.845125e+019
x[6] = 3.180845e+059
x[7] = 1.072769e+178
x[8] = 1.#INF00e+000
x[9] = 1.#INF00e+000
```

- 初期値の位置によって,方程式の解に収束したり発散したりする.

反復法(2)

- 初期値を $x[0] = 1.5$ とし,反復法

$$x[n+1] = \frac{3x[n] - 1}{x[n]^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

を実行.

例題(2)

```
x[0] = 1.500000                 .
x[1] = 1.555556                 .
x[2] = 1.515306                 .
x[3] = 1.544287          x[33] = 1.532090
x[4] = 1.523326          x[34] = 1.532088
x[5] = 1.538438          x[35] = 1.532089
x[6] = 1.527517          x[36] = 1.532089
x[7] = 1.535395          x[37] = 1.532089
x[8] = 1.529705          x[38] = 1.532089
x[9] = 1.533812          x[39] = 1.532089
```

- 区間 $(1, 2)$ の解に収束.
- 収束は遅い.
- ϕ の作り方によって収束の速さが異なる.

反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \phi(\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \mathsf{n} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots,$$

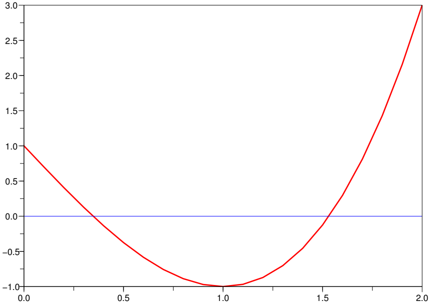
- 初期値の位置によって,方程式の解に収束したり発散したりする
- ϕ の作り方によって収束の速さが異なる.

代表的な反復法

- 2分法
- はさみうち法
- 割線法
- Newton 法

例題$\star\star\star$

- 方程式 $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ が区間 $(0, 1)$ と $(1, 2)$ に一つづつ解をもつことを示せ.



中間値の定理⋆⋆⋆

[定理]
実数値関数 f を $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $\mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ で連続とする. このとき,任意の $\gamma \in (\mathrm{f}(\mathrm{a}), \mathrm{f}(\mathrm{b}))$,または $\gamma \in (\mathrm{f}(\mathrm{b}), \mathrm{f}(\mathrm{a}))$ に対して,$\mathrm{f}(\mathrm{c}) = \gamma$ を満たす $\mathrm{c} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ が存在する.

[系]
実数値関数 f を $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $\mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ で連続とし, $\mathrm{f}(\mathrm{a})\mathrm{f}(\mathrm{b}) < 0$ とする. このとき,$\mathrm{f}(\mathrm{c}) = 0$ を満たす $\mathrm{c} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ が存在する.

例題の解答例$\star\star\star$

- 方程式 $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ が区間 $(0, 1)$ と $(1, 2)$ に解をもつことを示せ.
  1. 区間 $(0, 1)$ に解を持つこと:
     $$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0$$
     から,中間値の定理より $f(x) = 0$ の解は区間 $(0, 1)$ に存在する.
  2. 区間 $(1, 2)$ に解を持つこと:
     $$f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 3 > 0$$
     から,中間値の定理より $f(x) = 0$ の解は区間 $(1, 2)$ に存在する.

練習問題

中間値の定理を用いて,次の方程式の解が少なくとも1つ存在する区間を求めよ.

1. $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$
2. $x^2 = e^x$
3. $x = \cos x$
4. $x^x = 2$

練習問題の解答例

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

- $f(0) = -20 < 0$
- $f(2) = 16 > 0$
- したがって解が少なくとも一つ存在する区間は $(0, 2)$.
- 実際の実数解は,$x = 1.36881\ldots$.
  - 残りの二つの解は複素数となる.

練習問題の解答例

$f(x) = x^2 - e^x = 0$

- $f(-1) = 1 - 1/e = (e - 1)/e > 0$
  - $1 < e = 2.7182812\ldots$
- $f(1) = 1 - e < 0$
- したがって解が少なくとも一つ存在する区間は $(-1, 1)$.
- 実際の解は,$x = -0.703467\ldots$

練習問題の解答例

$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{x} - \cos \mathsf{x} = 0$

- $\mathsf{f}(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$
- $\mathsf{f}(\pi/2) = \pi/2 - \cos \pi/2 = \pi/2 > 0$
- したがって解が少なくとも一つ存在する区間は $(0, \pi/2)$.
- 実際の解は,$\mathsf{x} = 0.739085\ldots$

練習問題の解答例

$f(x) = x^x - 2 = 0$

- $f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$
- $f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$
- したがって解が少なくとも一つ存在する区間は $(1, 2)$.
- 実際の解は,$x = 1.55961\ldots$

2分法

- 方程式 $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ を考える.
- $f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 3 > 0$
- 第1近似: 区間 $(1, 2)$ の中点,すなわち

$$x[0] = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

- 区間 $(1, 3/2)$ と $[3/2, 2)$ のどちらかに $f(x) = 0$ の解が存在
- $f(3/2)$ の正負を調べる.

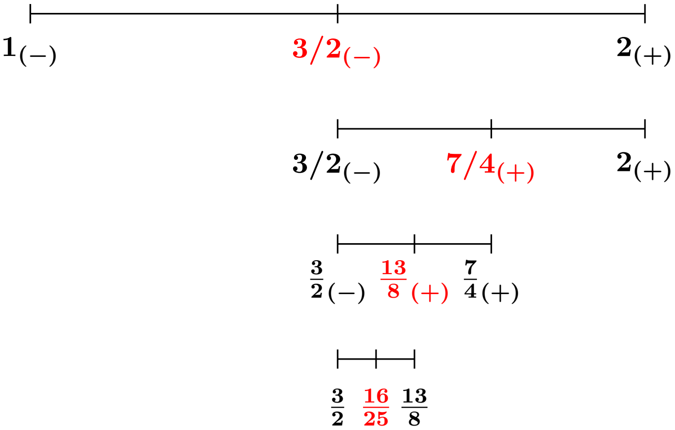
2分法

- $\mathsf{f}(3/2) = -1/8 < 0$
- $\mathsf{f}(1) = -1 < 0$, $\mathsf{f}(2) = 3 > 0$ であったので,解は区間 $(3/2, 2)$ に存在.
- 第2近似: 区間 $(3/2, 2)$ の中点,すなわち

$$\mathsf{x}[1] = \frac{3/2 + 2}{2} = \frac{7}{4}$$

- 区間 $(3/2, 7/4)$ と $[7/4, 2)$ のどちらかに $\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0$ の解が存在
- $\mathsf{f}(7/4)$ の正負を調べる.
- 以下同様

2分法



2分法

- 近似解

$$x[0] = \mathbf{3/2},\ x[1] = \mathbf{7/4},\ x[3] = \mathbf{13/8},\ x[4] = \mathbf{16/25}, \ldots$$

- 近似解と厳密解との誤差は,1ステップごとに半分になる.

$$|x^* - x[n]| \leq \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^n |x^* - x[0]|$$

- これより

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = x^*$$

- 2分法は厳密解に収束する反復法である.

1次収束

- 2分法における第 n ステップの近似誤差

$$\varepsilon[n] = |x^* - x[n]|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

は次式を満たす:

$$\varepsilon[n+1] \leq \frac{1}{2}\varepsilon[n], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- 一般に,ある整数 $n_0 \geq 0$ と実数 $C \in (-1, 1)$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\varepsilon[n+1] \leq C\varepsilon[n]$$

が成り立つとき,その反復法は 1次収束であるという.

p次収束

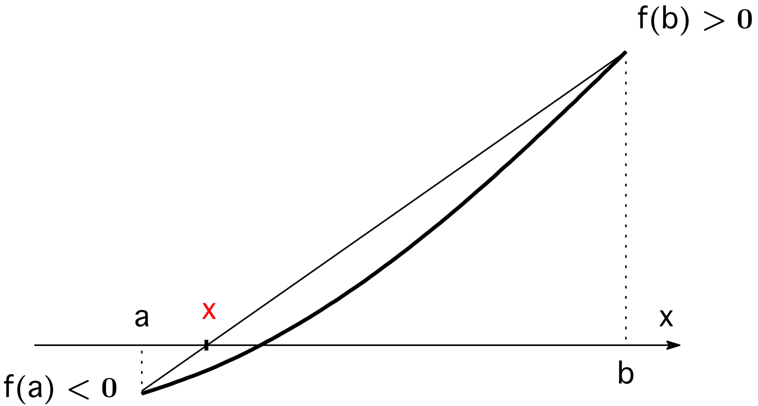
- ある整数 $n_0 \geq 0$ と実数 $C \in (-1, 1)$, $p \geq 1$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\varepsilon[n+1] \leq C\varepsilon[n]^p$$

が成り立つとき,その反復法は p次収束であるという.
- 特に,$p > 1$ のとき,超1次収束であるという.
- p を収束の次数と呼ぶ.

はさみうち法

- 中点ではなく,端点どおしを結んだ直線と x 軸との交点を近似値として選ぶ.
- 関数 f(x) を直線で近似する方法.



割線法

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ となる2点 a, bを見つけるのが困難な場合,たとえば
$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\pi^4} \log[(\pi - x)^2] + 1$$
のとき.
  - この関数が負の値をとるのは $(\pi - 10^{-667}, \pi + 10^{-667})$ の区間だけ.
- はさみうち法の直線近似の方法を少し変更する

割線法

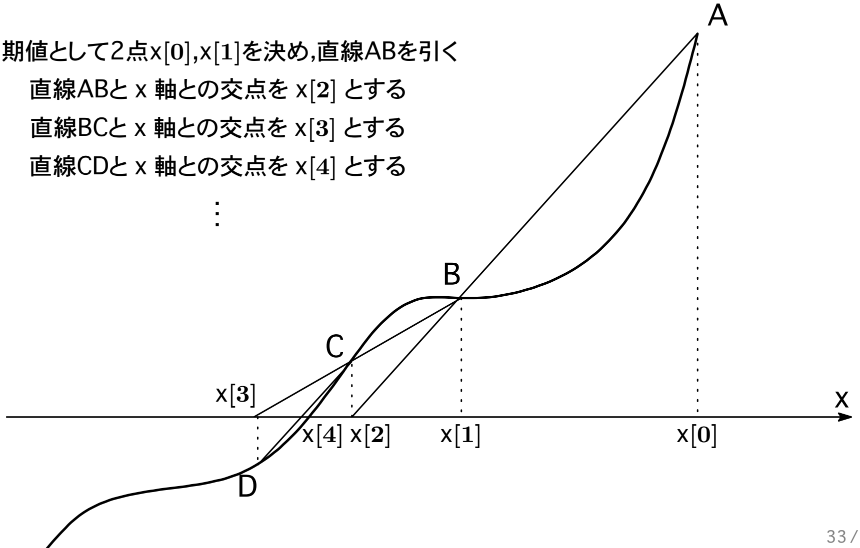
初期値として2点x[0],x[1]を決め,直線ABを引く

直線ABと x 軸との交点を x[2] とする

直線BCと x 軸との交点を x[3] とする

直線CDと x 軸との交点を x[4] とする

⋮

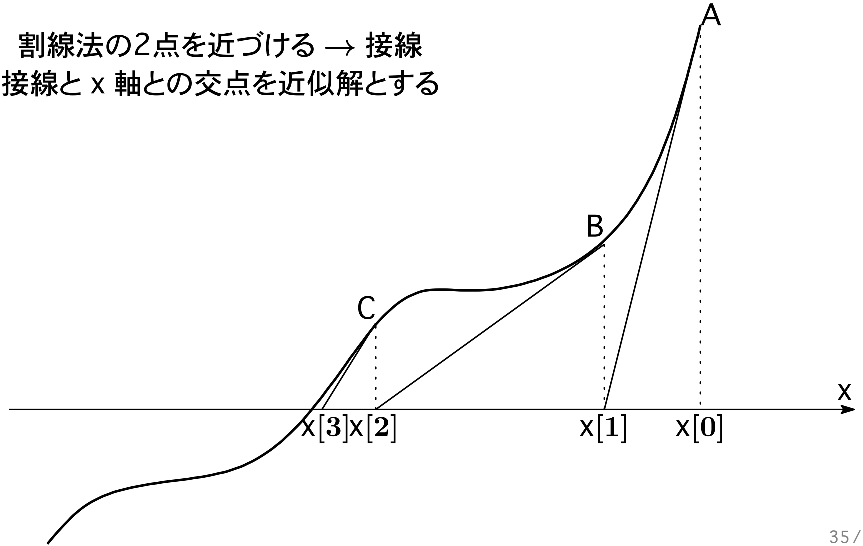


割線法の利点と欠点

- f(a)f(b) < 0 となる2点 a, b を選ぶ必要がない.
- 収束が2分法より早い
  - 収束の次数 p $= (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.63$ (超1次収束)
- いつも厳密解に収束するわけではない
  - 振動や発散することがある

Newton 法

割線法の2点を近づける → 接線
接線と x 軸との交点を近似解とする



Newton 法

- Newton法

$$x[n+1] = x[n] - \frac{f(x[n])}{f'(x[n])}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- 収束の速さは**2次収束**
- いつも収束するわけではない