数値計算

大阪大学基礎工学部

永原正章

2012年5月10日(5限)

休講のお知らせ⋆⋆⋆

下記の2回休講します(補講の日程は未定):

- 6月21日(木)
- 7月12日(木)

反復法

- 反復法:簡単には解けない難しい問題を,単純な問題の繰り返しで解く(近似解を求める)方法.
- ある集合 X 上の写像 ϕ と初期値 $x_0 \in X$ を与えて

$$x[n+1] = \phi(x[n]), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x[0] = x_0$$

  により漸近的に厳密解に収束させる.
  - $\sqrt{a}$ を求める反復法:$X = (0, \infty)$, $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$
- 厳密解 x^* は集合 X 内に存在すると仮定する.
- 関数 ϕ をうまく選ぶと, $\lim_{n\to\infty} x[n] = x^*$.
- 収束の速さも関数 ϕ の選び方に依存する.

反復法のブロック線図表現

- 反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \phi(\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathsf{x}[0] = \mathsf{x}_0$$

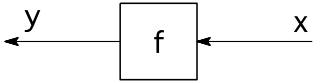
を「動的システム」とみて,ブロック線図で表現する.

関数 $y = f(x)$ のブロック線図⋆⋆⋆

- 関数

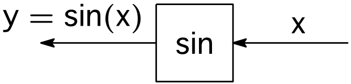
$$y = f(x)$$

- x: 入力,y: 出力,f: システム
- ブロック線図表現



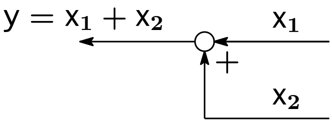
$y = \sin(x)$のブロック線図

- $y = \sin(x)$



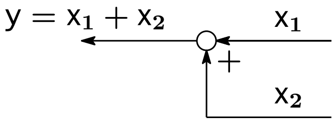
加算のブロック線図$\star\star\star$

- $y = x_1 + x_2$ (加算点)



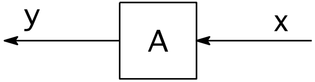
加算のブロック線図

- $y = x_1 + x_2$（加算点）



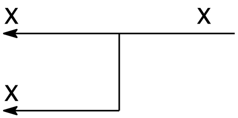
- 次のようにも書ける.

$$y = x_1 + x_2 = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



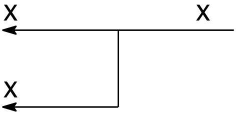
「コピー」のブロック線図⋆⋆⋆

- $y = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$（引き出し点）



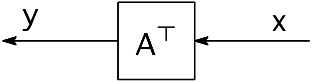
「コピー」のブロック線図

- $y = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$（引き出し点）



- 次のようにも書ける.

$$y = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = A^\top x$$

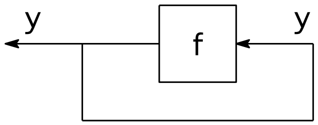


方程式 $y = f(y)$ のブロック線図⋆⋆⋆

- 方程式

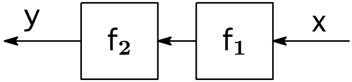
$$y = f(y)$$

- フィードバックシステム

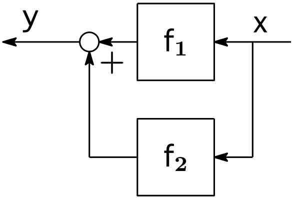


ブロック線図の例題⋆⋆⋆

- 次のブロック線図の数式表現を求めよ.

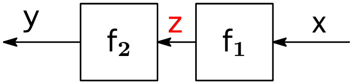


(a)



(b)

例題(a)⋆⋆⋆



(a)

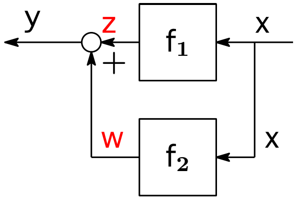
- すべての矢印に名前をつける. z
- それぞれの“箱” の入出力関係を数式で表す.

$$y = f_2(z), \quad z = f_1(x)$$

- 箱と箱の間にある矢印の変数 (z) を消す.

$$y = f_2(f_1(x)) = f_2 \circ f_1(x)$$

例題(b)



(b)

- すべての矢印に名前をつける. z, w
- それぞれの“箱” の入出力関係を数式で表す.

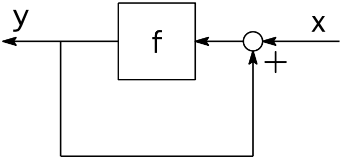
$$y = z + w, \quad z = f_1(x), \quad w = f_2(x)$$

- 箱と箱の間にある矢印の変数 (z, w) を消す.

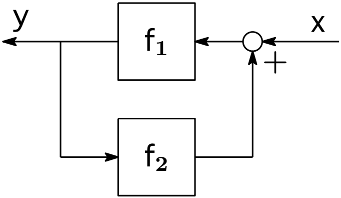
$$y = f_1(x) + f_2(x)$$

ブロック線図の例題⋆⋆⋆

- 次のブロック線図の数式表現を求めよ.

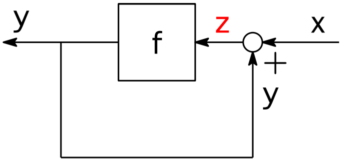


(c)



(d)

例題 (c)⋆⋆⋆



(c)

- すべての矢印に名前をつける. z
- それぞれの“箱” の入出力関係を数式で表す.

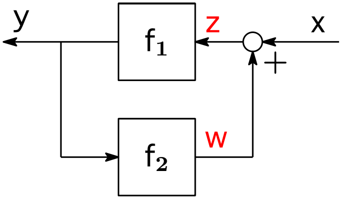
$$y = f(z), \quad z = x + y$$

- 箱と箱の間にある矢印の変数 (z) を消す.

$$y = f(x + y)$$

- フィードバックがあるときは,数式は「方程式」となる.

例題 (d)



(d)

- すべての矢印に名前をつける. z, w
- それぞれの“箱” の入出力関係を数式で表す.

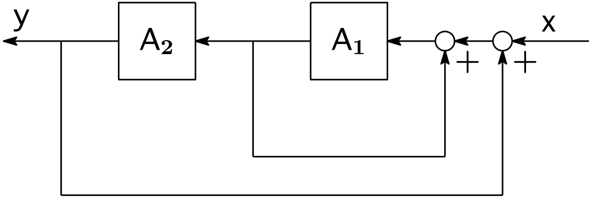
$$y = f_1(z), \quad z = x + w, \quad w = f_2(y)$$

- 箱と箱の間にある矢印の変数 (z, w) を消す.

$$y = f_1(x + w) = f_1(x + f_2(y))$$

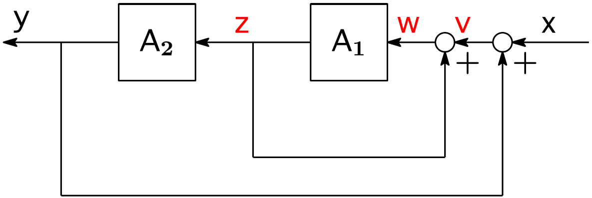
練習問題

- 次のブロック線図(e)の数式表現を求めよ.ただし,x, y はベクトル, A_1, A_2 は行列であり, $I - A_1$ および $I - A_2(I - A_1)^{-1}A_1$ は正則とする. また I は単位行列を表す.



(e)

練習問題の解答



(e)

- すべての矢印に名前をつける.z, w, v
- それぞれの“箱” の入出力関係を数式で表す.

$$y = A_2 z, \quad z = A_1 w, \quad w = v + z, \quad v = x + y$$

練習問題の解答

- z, w, vを消す.

$$
\begin{aligned}
z &= A_1 w = A_1(v+z),\\
\therefore z &= (I - A_1)^{-1} A_1 v = (I - A_1)^{-1} A_1 (x+y)\\
\therefore y &= A_2 z = A_2 (I - A_1)^{-1} A_1 (x+y)\\
\therefore y &= \left[I - A_2 (I - A_1)^{-1} A_1 \right]^{-1} A_2 (I - A_1)^{-1} A_1 x
\end{aligned}
$$

- フィードバックが存在するが,行列が正則なので,「方程式」を解いた形で書ける.

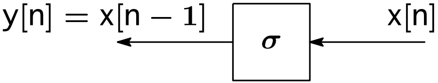
反復法のブロック線図表現

- ここでの目標:反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}+1] = \phi(\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{n} = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathsf{x}[0] = \mathsf{x}_0$$

のブロック線図表現を求める.

シフト作用素

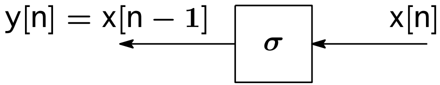


- 次のようなシステム σ を考える:

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}] = \sigma \mathrm{x}[\mathrm{n}] = \mathrm{x}[\mathrm{n}-1], \quad \mathrm{n} = 1, 2, \ldots$$

- 時刻 n での入力 x[n] を次の時刻 $\mathrm{n}+1$ まで記憶して出力
- 論理回路におけるレジスタ回路(記憶回路),またはフリップフロップと同じ
- σ は シフト作用素と呼ばれる

動的なシステム



- シフト要素のように内部に記憶を持つシステムを
  - 動的なシステム(dynamical system),または
  - 記憶を持つシステム(system with memory)

  と呼ぶ.
- 入出力のタイミングを同期させる必要がある
  - クロック同期回路が必要
- 時刻 $n = 1$ の出力 $y[1] = x[0]$ を確定するために初期値 $x[0]$ の設定が必要
  - 初期値を $x[0] = 0$ にセットすることをリセットという

反復法のブロック線図

- 反復法

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}] = \phi(\mathsf{x}[\mathsf{n}-1]), \quad \mathsf{n} = 1, 2, \ldots$$

- シフト作用素を用いて

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}] = \phi(\sigma\mathsf{x}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{n} = 1, 2, \ldots$$

  - 初期値 $\mathsf{x}[0]$ を設定

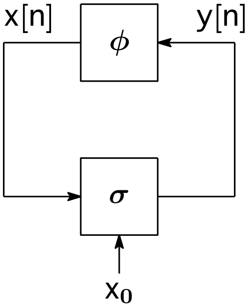
- 関数（作用素）の分割

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}] = \phi(\mathsf{y}[\mathsf{n}])$$
$$\mathsf{y}[\mathsf{n}] = \sigma\mathsf{x}[\mathsf{n}], \quad \mathsf{n} = 1, 2, \ldots$$

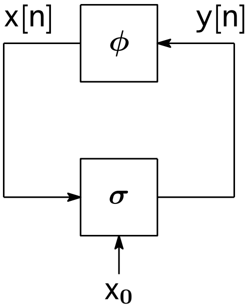
反復法のブロック線図

$$\mathsf{x}[\mathsf{n}] = \phi(\mathsf{y}[\mathsf{n}]), \quad \mathsf{y}[\mathsf{n}] = \sigma \mathsf{x}[\mathsf{n}], \quad \mathsf{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$$

$\mathsf{x}[\mathbf{0}] = \mathsf{x}_{\mathbf{0}}$: 初期値



反復法のブロック線図



- 反復法は静的なシステム ϕ と動的なシステム σ を持つ.
- 反復法はフィードバックの構造を持つ.
- 反復法は無限ループである(停止しない).

Xcosでのシミュレーション