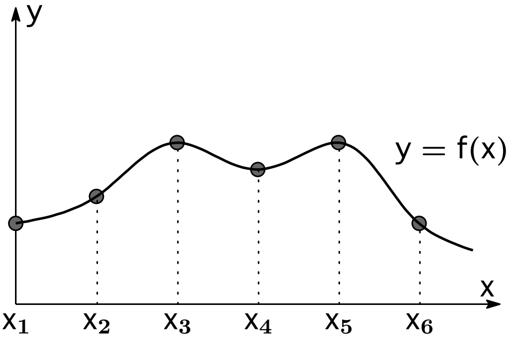
数値計算
大阪大学基礎工学部

永原正章

2012年7月5日(6限,補講)

補間多項式と数値積分

- 補間とは...
- N 組の離散データ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{N}$ が与えられたとき, そのデータ点を必ず通る(連続)関数$y = f(x)$を求めること.



多項式補間

- 多項式補間とは...
- N 組の離散データ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{N}$ が与えられたとき, そのデータ点を必ず通る$N-1$次多項式関数

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_N x^{N-1}$$

  を求める.
- データが2つの場合 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$.ただし$x_1 \neq x_2$とする.
  - この2点を通る1次多項式(直線)は,唯一つ存在する.
- データが3つの場合 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.ただし$x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_3 \neq x_1$とする.
  - この3点を通る2次多項式は,唯一つ存在する.

多項式補間

- データがN個の場合.ただし,$x_1, x_2, \ldots, x_N$ は互いに異なるとする.
- N個の点を必ず通る$N-1$次多項式が唯一つ存在する.
- 証明は後ほど...

多項式補間の例題

- 次のデータが与えられているとしよう.

x	0	1	2	3
y	1	3	3	5

- すなわち,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 5$$

- これらの点を必ず通る$N - 1 = 3$次多項式関数 $y = f(x)$ を求める.

多項式補間の例題

x	0	1	2	3
y	1	3	3	5

- 求める3次多項式を
$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
とおく.
- 上のデータを代入すれば,
$$\begin{aligned} 1 &= f(0) = a \\ 3 &= f(1) = a + b + c + d \\ 3 &= f(2) = a + 2b + 4c + 8d \\ 5 &= f(3) = a + 3b + 9c + 27d \end{aligned}$$
- 係数 a, b, c, d に関する線形連立方程式.

多項式補間の例題

- 連立方程式を解くと,

$$a = 1, \quad b = \frac{13}{3}, \quad c = -3, \quad d = \frac{2}{3}$$

が得られる.

- 求める3次多項式関数は

$$y = 1 + \frac{13}{3}x - 3x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

- このような多項式を**補間多項式**と呼ぶ.

一般の補間多項式

- N 個のデータ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{N}$ を必ず通る$N-1$次補間多項式を求める.
- 補間多項式を

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_N x^{N-1}$$

とおく.
- データを代入すると次の線形連立方程式が得られる.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \cdots + a_N x_1^{N-1} \\ y_2 &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \cdots + a_N x_2^{N-1} \\ &\vdots \\ y_N &= a_1 + a_2 x_N + a_3 x_N^2 + \cdots + a_N x_N^{N-1} \end{aligned}$$

一般の補間多項式

- 次の行列とベクトルを定義する.

$$M := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{bmatrix}, \quad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad a := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

- 連立方程式は

$$y = Ma$$

と書ける.

- 行列 M をVandermonde行列と呼ぶ.

Vandelmonde行列の行列式

- Vandelmonde行列

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix}$$

の行列式は以下で与えられる.

$$\det M = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} (x_i - x_j).$$

- 証明は線形代数の教科書を参照のこと.

補間多項式

- N個のデータ(x_n, y_n), $n = 1, 2, \ldots, N$をすべて通る$N-1$次多項式が存在して唯一つであるための必要十分条件は $x_1, x_2, \ldots, x_N$ が互いに異なることである.

証明

$$
\begin{aligned}
& x_1, x_2, \ldots, x_N \text{が互いに異なる} \\
& \Leftrightarrow \det M \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \text{線形方程式} y = Ma \text{の解が存在して唯一つ} \\
& \Leftrightarrow N-1 \text{次の補間多項式が存在して唯一つ}
\end{aligned}
$$

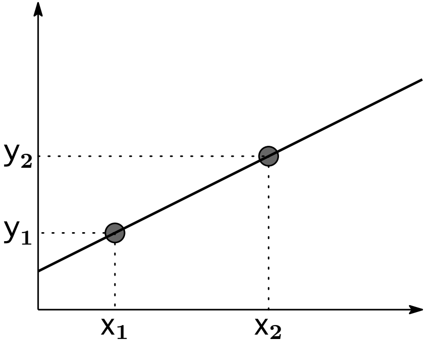
Lagrange補間公式

- 線形方程式を解かなくても補間多項式を書き下すことはできる (Lagrange補間公式)

1次Lagrange補間多項式

- 2組のデータ $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ が与えられたとき,この2点を通る1次関数は Lagrange 補間公式より次式で与えられる.

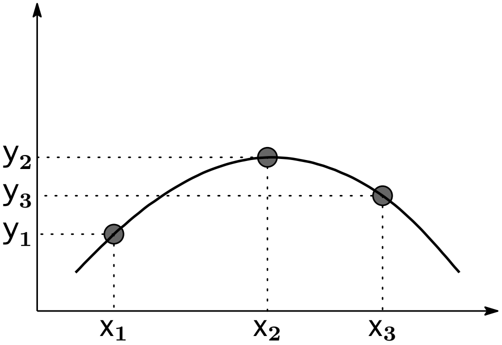
$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$



2次Lagrange補間多項式

- 3組のデータ $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ が与えられたとき,この3点を通る2次関数は Lagrange 補間公式より次式で与えられる.

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$



3次Lagrange補間多項式⋆⋆⋆

- 4組のデータ $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ が与えられたとき,この4点を通る3次関数は Lagrange 補間公式より次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
y = {} & y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \\
& + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}.
\end{aligned}
$$

$N-1$次Lagrange補間多項式

- N 組のデータ $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{N}$ が与えられ,$x_1, x_2, \ldots, x_N$ は互いに異なるとする. このとき,これらの点を全て通る $N-1$ 次多項式関数は 以下で与えられる.

$$y = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_N L_N(x).$$

- ここで,$L_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ は次式で与えられる.

$$L_n(x) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N} \frac{(x - x_k)}{(x_n - x_k)}, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

例題⋆⋆⋆

- 次のデータに対するLagrange補間多項式を求めよ.

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

例題⋆⋆⋆

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

- 3次Lagrange補間公式より

$$
\begin{aligned}
y &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + 1 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} \\
&\quad + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{1}{12}\left(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12\right).
\end{aligned}
$$

練習問題

- 次のデータに対する補間多項式を求めよ.

x	0	1	2	3
y	1	2	3	5

練習問題の解答

x	0	1	2	3
y	1	2	3	5

- 3次Lagrange補間公式より

$$
\begin{aligned}
y &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
&\quad + 3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 + 8x + 6\right)
\end{aligned}
$$