

$\Delta\Sigma$ 変調器の安定性解析と設計

和田 敏裕 (京都大学) 永原正章 (京都大学) 山本裕 (京都大学)

Stability Analysis and Design of $\Delta\Sigma$ Modulators

*T. Wada (Kyoto Univ.) M. Nagahara (Kyoto Univ.) Y. Yamamoto (Kyoto Univ.)

Abstract— In this paper, we study the stability of $\Delta\Sigma$ modulators by Lyapunov method, and we show a sufficient condition for the stability of higher-order multi-bit modulators. Then, we propose an H^∞ control design to shape the frequency response of signal transfer functions (STF) and noise transfer functions (NTF). Our optimization is reduced to linear matrix inequalities (LMI) and can be solved efficiently.

Key Words: $\Delta\Sigma$ modulators, quantization, discrete-time systems

1 はじめに

$\Delta\Sigma$ 変調器は、高性能の AD および DA 変換器に用いられ、計測やデジタル音声処理、無線通信などに用いられる^{6, 12, 7}。オーバーサンプリング処理と $\Delta\Sigma$ 変調器を組み合わせることによって、低ビット（通常は 1 ビット）の量子化にもかかわらず高解像度を持つ変換器を構成できる。

Fig. 1 は $\Delta\Sigma$ 変調器のブロック線図を示している。ここで $H = [H_1, H_2]$ は 2 入力 1 出力の線形システムであり、 Q は量子化器である。システム H の役割は、入力 r から出力 y までのシステム (STF) の特性をローパスとし、量子化誤差 $y - \psi$ から出力 y までのシステム (NTF) の周波数特性をハイパスにすることである。これにより、出力への量子化誤差の影響が高周波側に集まるので、もとのサンプリング周波数（例えばオーディオ CD では 44.1kHz）の整数倍（8 倍や 16 倍から数百倍まで）でオーバーサンプリングすることにより、元信号を低周波側へ、量子化誤差を高周波側へ分離することが可能となる。分離後、ローパスフィルタにより元信号を取り出せば元の信号が復元できる。また、無線通信等において変調波を入力信号とするシステムでは、量子化ノイズや他の帯域の変調波（混信ノイズ）を入力信号から分離するために NTF をバンドパス特性にする場合もある。

一方、量子化器は非線形システムであり、 $\Delta\Sigma$ 変調器は非線形要素をフィードバックループに持つ非線形システムとなる。したがって、非線形システムとしての安定性を解析することは重要な課題であり、従来様々な安定条件が提案されている^{6, 9}。しかし、これらは、入力信号を直流信号に限った低次の $\Delta\Sigma$ 変調器の安定条件³ やシミュレーションによる経験則からの安定条件¹、入出力安定性⁴ などであり、厳密に内部安定性を保証する安定条件はこれまでのところ得られていない。そこで、本研究では、Lyapunov 関数を用いて、 $\Delta\Sigma$ 変調器の安定性を解析する。これにより、従来よりも一般的な $\Delta\Sigma$ 変調器および入力に対する内部安定性の十

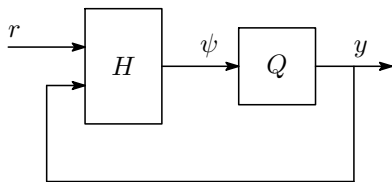


Fig. 1: $\Delta\Sigma$ 変調器

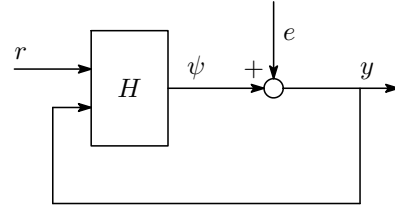


Fig. 2: $\Delta\Sigma$ 変調器の線形化モデル

分条件が得られる。

また、 $\Delta\Sigma$ 変調器における周波数整形は H^∞ 制御の得意とするところである。そこで本論文では、 $\Delta\Sigma$ 変調器を 2 自由度制御系ととらえ、2 つの制御器 $H_1(z)$ と $H_2(z)$ を離散時間 H^∞ 制御により設計する。

2 $\Delta\Sigma$ 変調器

2.1 $\Delta\Sigma$ 変調器の構成

ここでは $\Delta\Sigma$ 変調器における線形システム $H = [H_1, H_2]$ の役割について考える。ここで、量子化器 Q は非線形システムであるので、解析を容易にするために線形化モデルを導入する。量子化誤差を

$$e := Q(\psi) - \psi$$

とおき、誤差 e が入力 ψ に依存しないと仮定すると、Fig. 2 の付加雑音線形モデルが得られる。このモデルを用いれば、 $\Delta\Sigma$ 変調器の入出力関係は次のようにならわすことができる。

$$y = \text{STF } r + \text{NTF } e$$
$$\text{STF} := \frac{H_1}{1 - H_2}, \quad \text{NTF} := \frac{1}{1 - H_2}$$

たとえば 1 次の $\Delta\Sigma$ 変調器では、 $H_1(z) = 1/(z - 1)$ 、 $H_2(z) = -1/(z - 1)$ であり、

$$y = r + (1 - z^{-1})e$$

となる。このとき、Fig. 3 に示すように $\text{NTF}(z) = 1 - z^{-1}$ はハイパス特性を持つため、量子化誤差 e は高周波側に寄ることになる。これからわかるように、一般に、線形システム $\text{NTF}(z)$ の役割は誤差 e から出力 y までのシステムの周波数応答をハイパスにすることであり、また $\text{STF}(z)$ は入力 r から出力 y までのシステムをローパスにする役割がある（ただし上の例では全域で 1 である）。

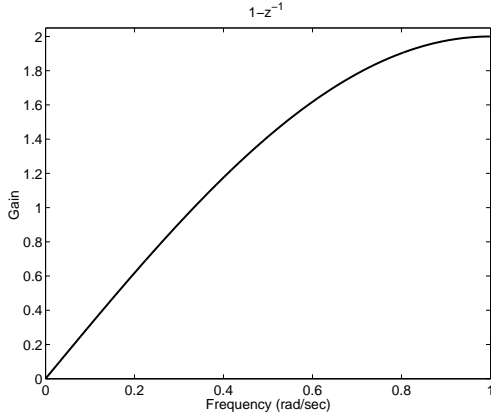


Fig. 3: $NTF(z) = 1 - z^{-1}$ の周波数応答

2.2 従来の安定条件

量子化器が非線形であるので、 $\Delta\Sigma$ 変調器はフィードバックループに量子化器を含む非線形システムであり、その安定性は前節で用いた線形化モデルでは保証できない。そこで量子化の非線形性を考慮した安定性の研究が従来より行われており、とくに次の3つの安定条件はよく知られている。

1. 2次 $\Delta\Sigma$ 変調器 (Fig. 6 および次章 Example 3. を参照) に対して、入力信号を振幅 r_0 の直流信号と仮定すると、 $\Delta\Sigma$ 変調器の状態 x_1, x_2 に関して

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq r_0 + 2 \\ |x_2| &\leq \frac{(5 - r_0)^2}{8(1 - r_0)} \end{aligned}$$

が成り立つ³⁾。

この条件入力をは直流信号に限った場合の解析であり、入力に変化する場合は不明である。実際、 $|r| \leq 0.3$ の範囲で入力に変化し、 x_1, x_2 が発散する例が知られている⁹⁾。

2. $NTF(z)$ を一般の n 次のシステムとし、量子化器を1ビットとすると、

$$\|NTF(z)\|_\infty < 1.5$$

で安定となる^{1, 9)}。

この安定条件はシミュレーションによる経験則であり、必要条件でも十分条件でもない。

3. $NTF(z)$ を一般の n 次のシステムとし、量子化器のステップ数を N とする。また

$$\|r\|_\infty \leq N + 2 - \|ntf\|_1$$

が成り立つと仮定する。ここで ntf は線形システム NTF のインパルス応答である。このとき、 $|\psi[0]| \leq N + 1$ ならば任意の時刻 $n \geq 0$ で $|\psi[n]| \leq N + 1$ が成り立つ^{4, 9)}。

この条件は、量子化器への入力 ψ の最大値が量子化器の飽和レベル $N + 1$ を越えない条件であり、内部安定性の条件ではない。

これらからわかるように、従来の研究では、一般の $\Delta\Sigma$ 変調器および入力に対して、内部安定性に関する厳密な解析はほとんど行われていない。そこで次章では、Lyapunov の方法を用いて、一般の (高次の) $\Delta\Sigma$ 変調器の安定性を理論的に解析する。

3 Lyapunov 関数を用いた安定性解析

線形システム $H(z)$ の状態空間実現を

$$H(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_H & B_1 & B_2 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right]$$

とする。このとき、 $\Delta\Sigma$ 変調器の状態空間表現は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \sigma x &= (A_H + B_2 C)x + B_1 r + B_2 e \\ e &:= Q(Cx) - Cx \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (1)$$

まず、 $A := A_H + B_2 C$ が安定であると仮定する。これは線形化モデルが安定であるための必要十分条件である。このとき、行列 $X > 0, Y > 0$ が存在して、Lyapunov 方程式

$$A'XA - X = -Y \quad (2)$$

が成り立つ。

次に量子化器に関して次の仮定をおく。

- ある $M > 0$ と $\delta > 0$ が存在して、もし $|\psi| \leq M$ ならば $|\psi - Q(\psi)| \leq \delta$ 。

たとえばステップ数が N (ビット数が $\lceil \log_2(N+1) \rceil$ [bit]) のような量子化器の場合は、 $M = N + 1, \delta = 1$ である。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 1. 次式を仮定する。

$$\Omega\gamma \leq \frac{M}{\|C\|} \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Omega &:= \|B_1\| \|r\|_\infty + \|B_2\| \delta \\ \gamma &:= \max\{\alpha, \beta\} \\ \alpha &:= \sqrt{\frac{|\bar{\lambda}(X) - \underline{\lambda}(Y)|\beta^2 + 2\|XA\|\beta + \bar{\lambda}(X)}{\underline{\lambda}(X)}}} \\ \beta &:= \frac{\|XA\| + \sqrt{\|XA\|^2 + \bar{\lambda}(X)\underline{\lambda}(Y)}}{\underline{\lambda}(Y)} \end{aligned}$$

このとき

$$R := \left\{ x \in \mathcal{R}^n : x'Xx \leq \underline{\lambda}(X) \frac{M^2}{\|C\|^2} \right\} \quad (4)$$

はシステム (1) にたいする不変集合となる。

Proof. ベクトル $x \in R$ をとる。このとき、 $x'Xx \leq \underline{\lambda}(X)M^2/\|C\|^2$ より $|x| \leq M/\|C\|$ 。これより、 $|Cx| \leq M$ であるから、 $|e| = |Q(Cx) - Cx| \leq \delta$ が成り立ち、 $w := B_1 r + B_2 e$ とおくと

$$|w| \leq \|B_1\| \|r\|_\infty + \|B_2\| \delta = \Omega \quad (5)$$

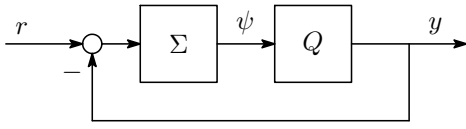


Fig. 4: 1次 $\Delta\Sigma$ 変調器

となる．また (3) より

$$\Omega\beta \leq \frac{M}{\|C\|} \quad (6)$$

が成り立つ．

次の関数を定義する．

$$V(x) := x'Xx$$

ここで， $X > 0$ であるから，0でない任意の $x \in R$ に対して $V(x) > 0$ となる．この $V(x)$ に関して，

$$\begin{aligned} V(\sigma x) - V(x) &= (Ax + w)'X(Ax + w) - x'Xx \\ &= -x'Yx + 2w'XAx + w'Xw \\ &\leq -\underline{\lambda}(Y)|x|^2 + 2\Omega\|XA\||x| + \bar{\lambda}(X)\Omega^2 \end{aligned}$$

$|x| \geq \Omega\beta$ とすると，上式より $V(\sigma x) - V(x) \leq 0$ ．したがって， $\sigma x \in R$ となる．また $|x| \leq \Omega\beta$ とすれば，

$$\begin{aligned} (\sigma x)'X(\sigma x) &\leq \{\bar{\lambda}(X) - \underline{\lambda}(Y)\}|x|^2 + 2\Omega\|XA\||x| + \bar{\lambda}(X)\Omega^2 \\ &\leq \{\bar{\lambda}(X) - \underline{\lambda}(Y)\}\beta^2 + 2\|XA\|\beta + \bar{\lambda}(X)\}\Omega^2 \\ &\leq \underline{\lambda}(X)\gamma^2\Omega^2 \\ &\leq \underline{\lambda}(X)\frac{M^2}{\|C\|^2} \end{aligned}$$

これより $|x| \leq \Omega\beta$ の場合も $\sigma x \in R$ となる．以上より R はシステム (1) の不変集合となる．□

この定理より，入力 r の大きさの上限と量子化レベル M を (3) で定め， $\Delta\Sigma$ 変調器の初期値を領域 R 内にとれば，非線形システム (1) の状態は常に領域 R 内にとどまることがわかる．すなわち， $\Delta\Sigma$ 変調器の状態空間実現 (3) が与えられたときに，この定理を用いて入力 r の上限および量子化器のビット数を定めることができる．

Example 1. Fig. 4 の 1次 $\Delta\Sigma$ 変調器を考える．ここで

$$\Sigma(z) = \frac{1}{z-1}$$

$$Q(\psi) = \text{sgn}(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0, \\ -1, & \psi < 0 \end{cases}$$

このとき，(1) に対応するパラメータは

$$A_H = 1, B_1 = 1, B_2 = -1, C = 1, \\ M = 2, \delta = 1$$

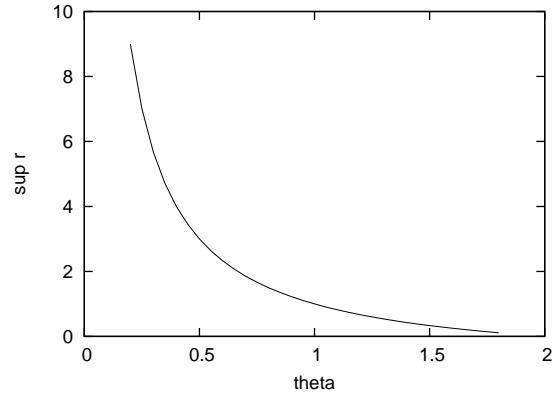


Fig. 5: パラメータ θ に対する $\sup r$

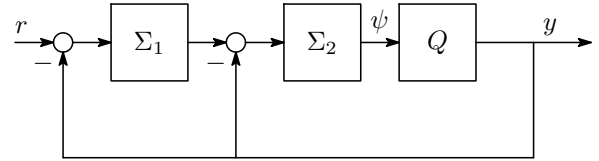


Fig. 6: 2次 $\Delta\Sigma$ 変調器

である．また $A = A_H + B_2C = 0$ であるから，Lyapunov 方程式 (2) は任意の正数 $X = Y > 0$ により満たされる．Theorem 1 より， $\|r\| \leq 1$ かつ初期値が $|x[0]| \leq 2$ を満たせば，任意の $k \geq 0$ で $|x[k]| \leq 2$ が成り立つことがわかる．この結果は，従来の安定性解析の結果と一致する．

Example 2. Example 1 と同様に，Fig. 4 の $\Delta\Sigma$ 変調器を考える．ただし，積分器は $\theta > 0$ をパラメータとして持つ次のシステム

$$\Sigma(z) = \frac{\theta}{z - \theta}$$

であるとする．積分器をオペアンプを用いて実装するとき，現実のオペアンプのゲインは有限であり，その場合には $\theta < 1$ となる⁶⁾．また $\theta > 1$ の場合は，chaotic modulator と呼ばれる⁸⁾．このとき Theorem 1 より θ に対する r の最大値を求めると，Fig. 5 のようになる．このグラフから，パラメータ θ が与えられたときに入力 r の最大値 $\|r\|_\infty$ を定めることができる．

Example 3. Fig. 6 の 2次 $\Delta\Sigma$ 変調器を考える．ここで

$$\Sigma_1(z) = \frac{z}{z-1}, \Sigma_2(z) = \frac{1}{z-1}$$

であり，状態空間実現は

$$A_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．これより，

$$A = A_H + B_2C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lyapunov 方程式 (2) の解の一つは

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

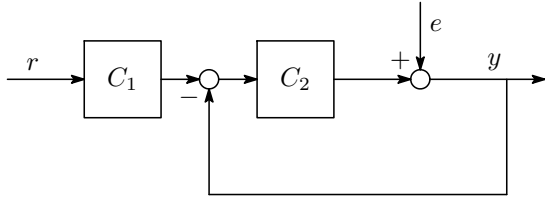


Fig. 7: 2自由度制御系

となり, $\bar{\lambda}(Y) = \underline{\lambda}(Y) = 1, \bar{\lambda}(X) = 5, \underline{\lambda}(X) = 1$ である. このとき, 条件 (3) は

$$\sqrt{2}\|r\|_{\infty} + \sqrt{5}\delta \leq \frac{M}{5\sqrt{5}}$$

となり, これより少なくとも $\sqrt{5}\delta < M/5\sqrt{5}$ が成り立たなければならない. 量子化器 Q に一様量子化を用いるとすると, $\delta = 1, M > 25$ となり, 量子化器におけるビット数は 5 [bit] 必要となる. すなわち, $M = 33$. これより, 入力信号 r の条件は

$$\|r\|_{\infty} \leq \frac{8}{5\sqrt{5}} \approx 0.5060$$

となる.

4 $\Delta\Sigma$ 変調器の設計

前章での安定性解析より, $\Delta\Sigma$ 変調器が安定であるためには, 少なくとも線形化モデルは内部安定でなければならない. そこで本章では, $\Delta\Sigma$ 変調器を 2 自由度制御系にとらえ, フィードバック系を内部安定化する制御器を特徴づけ, H^{∞} 制御により STF と NTF の周波数整形を行なう.

まず, Fig. 7 の 2 自由度フィードバック制御系を考える. Fig. 7 のフィードバック系を内部安定化するすべての $C_1(z), C_2(z)$ は, 従来から制御理論でよく知られた手法で求まる^{2), 5)}.

Theorem 2. Fig. 7 のフィードバック系が well-posed であり, かつ内部安定化するすべての $C_1(z)$ および $C_2(z)$ は次で与えられる.

$$C_1(z) = R_1(z), \quad R_1 \in \mathcal{S}$$

$$C_2(z) = \frac{R_2(z)}{1 - R_2(z)}, \quad R_2 \in \mathcal{S}'$$

ここで, \mathcal{S} は安定かつプロパーな有利伝達関数の集合であり, \mathcal{S}' は安定かつ厳密にプロパーな有理伝達関数の集合である.

これらのパラメータ $R_1 \in \mathcal{S}, R_2 \in \mathcal{S}'$ を用い, $C_1(z) = R_1(z), C_2 = R_2(z)/(1 - R_2(z))$ とすれば, Fig. 7 のシステムの入出力関係は以下で与えられる.

$$y = R_1 r + (1 - R_2)e \quad (7)$$

ここで, $R_1 = 1, R_2(z) = z^{-1}$ とおけば, 従来の 1 次 $\Delta\Sigma$ 変調器 (Fig. 4) となる. この Lemma 2 を用いて, 周波数応答の整形問題を次のように定式化する.

Problem 1. 安定な重み伝達関数 $W_{STF}(z)$ と $W_{NTF}(z)$ が与えられたとき, 次の不等式を満たす $R_1 \in \mathcal{S}$ および $R_2 \in \mathcal{S}'$ を求めよ.

$$\|R_1 W_{STF}\|_{\infty} < 1, \quad \|(1 - R_2)W_{NTF}\|_{\infty} < 1 \quad (8)$$

ここで, デジタルフィルタの実装には FIR (Finite Impulse Response) フィルタがよく用いられるので, $R_1(z), R_2(z)$ を FIR フィルタとし,

$$R_1(z) = \sum_{k=0}^{N_1} a_k z^{-k}, \quad R_2(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k}, \quad b_0 = 0$$

とおくと, $R_1 \in \mathcal{S}, R_2 \in \mathcal{S}'$ となり, 不等式 (8) はフィルタ係数 $a_1, \dots, a_{N_1}, b_1, \dots, b_{N_2}$ を変数とした線形行列不等式で書くことができる¹¹⁾. したがって, MATLAB などの数値計算ソフトウェアを用いることによって効率的にフィルタ係数を求めることができる.

5 おわりに

本論文では Lyapunov の方法により $\Delta\Sigma$ 変調器の安定性を解析し, 安定性の十分条件を導出した. この安定条件を用いれば, 一般の高次の $\Delta\Sigma$ に対して, 入力の大さの最大値と量子化器のビット数を定めることができる. また, $\Delta\Sigma$ 変調器の周波数整形に H^{∞} 最適化を用いることを提案した. 従来ではループフィルタとしてもっぱら積分器 (加算器) が用いられ, 構造が限られているのに対し, 本手法は FIR フィルタの構造を仮定し, 様々な周波数特性を持つ $\Delta\Sigma$ 変調器を設計することができる.

参考文献

- 1) K. C. H. Chao, S. Nadeem, W. L. Lee and C. G. Sordini, A higher order topology for interpolative modulators for oversampling A/D conversion, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 37, No. 3, 1990.
- 2) J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell Macmillan International, 1992.
- 3) S. Hein and Z. Zakhor, On the stability of sigma delta modulators, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 41, No. 7, 1993.
- 4) J. G. Kenney and L. R. Carley, Design of multibit noise-shaping data converters, *Analog Int. Circuits Signal Processing Journal*, Vol. 3, 1993.
- 5) 前田, 杉江, アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報ライブラリー, 朝倉書店
- 6) S. R. Norsworthy, R. Schreier and G. C. Temes, *Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press, 1997.
- 7) J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw Hill, 2000.
- 8) R. Schreier, Destabilizing limit cycles in delta-sigma modulators with chaos, *Proc. IEEE Int. Symp. Circuit Sys.*, Vol. 2, 1993.
- 9) R. Schreier and G. C. Temes, *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, Wiley, 2005.
- 10) P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993.
- 11) Y. Yamamoto, B. D. O. Anderson, M. Nagahara and Y. Koyanagi, Optimizing FIR Approximation for discrete-time IIR filters, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 10, No. 9, 2003.
- 12) U. Zölzer, *Digital Audio Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997.