

サンプル値制御理論による画像の解像度変換

Resolution Conversion of Digital Images via Sampled-Data Control Theory

永原 正章 (京都大学), 山本 裕 (京都大学)
M. Nagahara*, Y. Yamamoto*,
Kyoto University*

Abstract For handling digital images with different kinds of resolution, we have to convert their resolution. Conventionally, interpolation methods (e.g., bicubic) are used for this purpose. In applying these methods, it is generally assumed that the original analog images are fully band-limited up to the Nyquist frequency. As a result, the converted images may be blurred. To solve this problem, we introduce the sampled-data control theory. By this theory, we can obtain interpolation taking account of the characteristic of original analog images.

1 はじめに

解像度の異なるデバイス間で画像データを取り扱ったり、画像のサイズを変換するためには解像度の変換が必要となる。画像の解像度変換には、最近傍 (nearest neighbour) 法や双線形 (bilinear)、双 3 次 (bicubic) 法などの補間法がよく用いられている [2]。最近傍法は、補間する点の輝度値を最も近傍の輝度値とする方法であり、0 次ホールドと同じ働きをする。一方、双線形法と双 3 次法はそれぞれ、1 次および 3 次補間の一種であり、双線形法では近傍の 4 点、双 3 次法では近傍の 16 点を用いて補間を行う。最近傍法では単純に近傍の値をホールドするだけなので、処理は単純であるが画質は低い。一方、双線形法や双 3 次法は計算は複雑であるが、画質は良くなる。

これらの手法は補間すべき点が 1 次や 3 次の多項式で単純に近似できている。これは、アナログの原画像がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定した上での議論である。しかし実際には、アナログ画像がそのような性質を持っているとは言いがたく、もとのアナログ画像の特性を活かした補間処理が望まれる。実際、上記の双線形法や双 3 次法による解像度変換では、原画像の高周波成分が除去され、ぼけた画像になりやすい。

そこで本研究では、画像の解像度変換にサンプル値制御理論 [3] を導入する。すなわち、サンプル値制御理論により、もとのアナログ画像の周波数特性を考慮し、アナログ原画像と処理画像の誤差系の H^∞ ノルムが最小となるような補間フィルタを設計する。サンプル値系である誤差系に対して、ノルムが等しい離散時間の誤差系を導くことによって、設計問題は離散時間 H^∞ 問題に

帰着できることを示す。

2 問題設定

図 1 のサンプルレート変換器を考える。ここで自然数 M_1 と M_2 は既約とする。まずサンプル周期 M_1h の離

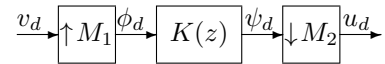


図 1: Sample-rate converter

散時間信号 v_d がアップサンブラ

$$\uparrow M_1 : y_d \mapsto x_d : x_d[k] = \begin{cases} y_d[l], & k = M_1l, l = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

によってサンプル周期 h の離散時間信号 ϕ_d に変換される。次に信号 ϕ_d はデジタルフィルタ $K(z)$ によって処理され、その出力 ψ_d がダウンサンブラ

$$\downarrow M_2 : x_d \mapsto u_d : u_d[k] = x_d[M_2k]$$

によって最終的にサンプル周期 M_2h/M_1 の信号 u_d に変換される。このサンプルレート変換器を用いれば、画像の解像度を M_1/M_2 倍することができ、有理数倍の解像度変換が達成される。

一方、サンプルレート変換器は図 2 のようにも構成できる。ここでシステム $K_1(z)(\uparrow M_1)$ はインターポレータであり、また $(\downarrow M_2)K_2(z)$ はデシメータである。この構成の利点はフィルタ $K_1(z)$ と $K_2(z)$ が前述のフィルタ $K(z)$ に比べ低い次数で構成が可能である点である。本研究では、サンプルレート変換器の設計において、フィルタ $K(z)$ を直接設計するのではなく、インターポレー

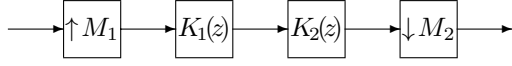


図 2: Sample-rate converter

ションフィルタ $K_1(z)$ およびデシメーションフィルタ $K_2(z)$ を別々に設計する.

2.1 インターポレータの設計問題

まずインターポレータの (準) 最適設計問題を定式化する. 図 3 のブロック線図を考える. 入力信号 $w \in L^2$

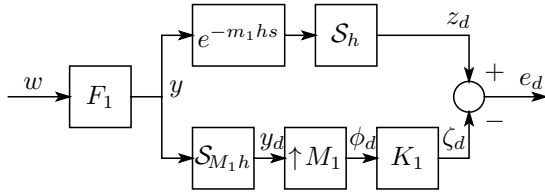


図 3: Error system \mathcal{T}_1

がアナログローパスフィルタ $F_1(s)$ を通り y を得る. ここで $F_1(s)$ はアナログ信号 y の周波数特性を示している. 次にこの信号はサンプル周期 M_1h で動作するサンプラ S_{M_1h} によって離散時間信号 y_d に変換される. この離散時間信号 y_d はアップサンプラ $\uparrow M_1$ によってサンプル周期 h の離散時間信号 ϕ_d に変換される. ϕ_d はデジタルフィルタ $K_1(z)$ を通り, 離散時間信号 ζ_d となる. 一方, 連続時間信号 y が時間 m_1h ($m_1 \in \mathbb{Z}_+$) だけ遅れたものをサンプル周期 h で離散化した信号を z_d とおく. そして z_d と ζ_d との差を $e_d := z_d - \zeta_d$ とし, w から e_d までのシステムを \mathcal{T}_1 とおくと, フィルタ $K_1(z)$ の設計問題は以下のように定式化される.

問題 1 安定かつ厳密にプロパーな $F_1(s)$ および, アップサンプラ定数 M_1 , サンプリング周期 h , 遅れステップ m_1 , 正数 γ_1 が与えられたとき,

$$\|\mathcal{T}_1\| := \sup_{w \in L^2} \frac{\|\mathcal{T}_1 w\|_2}{\|w\|_2} < \gamma_1 \quad (1)$$

を満たすデジタルフィルタ $K_1(z)$ を求めよ.

2.2 デシメータの設計問題

ここではデシメータの (準) 最適設計問題を定式化する. 図 4 のブロック線図を考える. ここでは, 入力信号はサンプル周期 h の離散時間信号 $w_d \in \ell^2$ である. 信

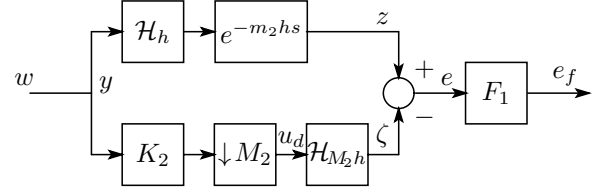


図 4: Error system \mathcal{T}_2

号 w_d はまずデジタルフィルタ $K_2(z)$ によって処理され, ダウンサンプラ $\downarrow M_2$ によってサンプル周期 M_2h の離散時間信号 u_d に変換される. 次に u_d は 0 次ホールド \mathcal{H}_{M_2h} により連続時間信号 ζ となる. 一方, 離散時間信号 w_d を 0 次ホールド \mathcal{H}_h によって連続時間信号に変換し, 時間 m_2h ($m_2 \in \mathbb{Z}_+$) だけ遅れたものを z とおく. 誤差を $e := z - \zeta$ とし $e_f := F_2 e$ とする. 入力 w_d から 誤差 e_f までのシステムを \mathcal{T}_2 とおくと, 設計問題は次のように定式化される:

問題 2 安定かつ厳密にプロパーな $F_2(s)$ および, アップサンプラ定数 M_2 , 遅れステップ m_2 , 正数 γ_2 が与えられたとき,

$$\|\mathcal{T}_2\| := \sup_{w_d \in \ell^2} \frac{\|\mathcal{T}_2 w_d\|_2}{\|w_d\|_2} < \gamma_2 \quad (2)$$

を満たすデジタルフィルタ $K_2(z)$ を求めよ.

3 サンプル値制御理論によるフィルタ設計

3.1 離散時間 H^∞ 問題への帰着

まず, 離散時間リフティングを定義する.

$$\mathbf{L}_N := (\downarrow N)[1 \ z \ \dots \ z^{N-1}]^T,$$

$$\mathbf{L}_N^{-1} := [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-N+1}](\uparrow N)$$

離散時間 LTI システム $P(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ に対して, システムの離散時間リフティングを

$$\mathcal{L}_N(P) := \mathbf{L}_N P \mathbf{L}_N^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} A^N & A^{N-1}B & \dots & AB & B \\ C & D & & & 0 \\ CA & CB & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

とおく．また $F_i(s)$ ($i = 1, 2$) の実現を (A_i, B_i, C_i, D_i) とおき (ただし $D_1 = 0$) , 次の作用素を定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 : L^2_{[0,h]} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_1 w := \int_0^h e^{A_1(h-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau, \\ \mathcal{C}_2 : \mathbb{R}^n &\rightarrow L^2_{[0,h]}, \quad (\mathcal{C}_2 x)(t) := C_2 e^{A_2 t} x, \\ \mathcal{D}_2 : L^2_{[0,h]} &\rightarrow L^2_{[0,h]}, \\ (\mathcal{D}_2 w)(t) &:= D_2 w(t) + \int_0^t C_2 e^{A_2(t-\tau)} B_2 w(\tau) d\tau \end{aligned}$$

このとき , 次の定理が成り立つ .

定理 1 1. インターポレータ設計の誤差系 \mathcal{T}_1 に対して次の関係式が成り立つ .

$$\|\mathcal{T}_1\| = \|(D_{m_1} - \tilde{K}_1 S) F_{d1}\| \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} D_{m_1} &:= \mathcal{L}_{M_1}(z^{-m_1}), \quad S := [1 \ 0 \ \dots \ 0] \\ F_{d1} &:= \mathcal{L}_{M_1} \left(\left[\begin{array}{c|c} A_{d1} & B_{d1} \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \right), \\ A_{d1} &:= e^{A_1 h}, \quad B_{d1} B_{d1}^T = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^*, \\ \tilde{K}_1 &:= \mathcal{L}_{M_1}(K_1) [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \end{aligned}$$

2. デンメータ設計の誤差系 \mathcal{T}_2 に対して次の関係式が成り立つ .

$$\|\mathcal{T}_2\| = \|F_{d2}(D_{m_2} - H \tilde{K}_2)\| \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} D_{m_2} &:= \mathcal{L}_{M_2}(z^{-m_2}), \quad H := [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \\ F_{d2} &:= \mathcal{L}_{M_2} \left(\left[\begin{array}{c|c} A_{d2} & B_{d2} \\ \hline C_{d2} & D_{d2} \end{array} \right] \right), \\ A_{d2} &:= e^{A_2 h}, \quad B_{d2} := \int_0^h e^{A_2 \tau} d\tau B, \\ [C_{d2} \ D_{d2}]^T [C_{d2} \ D_{d2}] &= [C_2 \ D_2]^* [C_2 \ D_2], \\ \tilde{K}_2 &:= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathcal{L}_{M_2}(K_2) \end{aligned}$$

証明 1. サンプル値系 $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{B}(L^2, \ell^2)$ に対して , LTI 離散時間系 $T_{d1} \in \mathcal{B}(\ell^2, \ell^2)$ が存在して , $\|\mathcal{T}_1\|^2 = \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_1^*\| = \|T_{d1} T_{d1}^*\| = \|T_{d1}\|^2$ が成り立つ . ここで $T_{d1} = (D_{m_1} - \tilde{K}_1 S) F_{d1}$ である .

2. 上と同様にして , $T_{d2} = F_{d2}(D_{m_2} - H \tilde{K}_2)$ に対して , $\|\mathcal{T}_2\|^2 = \|\mathcal{T}_2^* \mathcal{T}_2\| = \|T_{d2}^* T_{d2}\| = \|T_{d2}\|^2$ が成り立つ .

□

定理の公式の詳細な計算は [5, 6] を参照されたい .

定理 1 より , 問題 1 および問題 2 は , それぞれ , 離散時間 LTI フィルタ \tilde{K}_1 および \tilde{K}_2 を求める 1 ブロックの離散時間 H^∞ 最適化問題に帰着された . 得られた \tilde{K}_1 および \tilde{K}_2 から K_1 および K_2 を得るには , 次の公式を用いればよい [5] .

$$\begin{aligned} K_1(z) &= [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-M_1+1}] \tilde{K}_1(z^{M_1}), \\ K_2(z) &= \tilde{K}_2(z^{M_2}) [1 \ z \ \dots \ z^{M_2-1}]^T \end{aligned}$$

上式より K_2 の因果性が失われる可能性があるが , 画像処理への応用では , フィルタは非因果的であってもかまわない .

3.2 サンプルレート変換器

前節で設計したフィルタ $K_1(z)$, $K_2(z)$ を用いて , 図 1 のサンプルレート変換器を図 2 のように構成し , $K(z) = K_1(z)K_2(z)$ とおく . このとき , 誤差系

$$\mathcal{T} := F_2 \{ e^{-mhs} - \mathcal{H}_{M_2 h} (\downarrow M_2) K(z) (\uparrow M_1) \mathcal{S}_{M_1 h} \} F_1$$

を考える . ここで , $m = m_1 + m_2$ である . 設計された $K_1(z)$, $K_2(z)$ に対して $\|\mathcal{T}_1\| = \gamma_1$, $\|\mathcal{T}_2\| = \gamma_2$ とおく . 誤差系 \mathcal{T} のノルムに対して , 次の命題が成り立つ .

命題 1

$$\|\mathcal{T}\| \leq \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \|F_2 \mathcal{H}_h\|, \quad \alpha_2 = \|\mathcal{S}_h F_1\|, \\ \alpha_3 &= \|F_2(I - \mathcal{H}_h \mathcal{S}_h) F_1\| \end{aligned}$$

証明 次式と誘導ノルムの性質 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ および $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ を用いれば (5) が成り立つことがわかる .

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 &= F_2 e^{-m_2 h s} \mathcal{H}_h T_1 + \mathcal{T}_2 \mathcal{S}_h e^{-m_1 h s} F_1 - \mathcal{T} \\ &\quad + F_2 e^{-m h s} (I - \mathcal{H}_h \mathcal{S}_h) F_1 \end{aligned}$$

□

この命題より , サンプルレート変換器の性能 $\|\mathcal{T}\|$ が評価できる . すなわち , $\|\mathcal{T}\| < \gamma$ となるようなサンプルレート変換器を設計したい場合 , まず \mathcal{T}_1 に対して最適化を行い , $\|\mathcal{T}_1\| = \gamma_1$ が得られたとすると , この γ_1 を用いて

$$\gamma_1 \gamma_2 + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 < \gamma$$

を満たすような γ_2 に対して $\|\mathcal{T}_2\| < \gamma_2$ となるように \mathcal{T}_2 を最適化すればよい .

3.3 2次元フィルタの構成

前節で設計したフィルタは1次元である．これを画像処理に適用するために，処理を2次元化する必要がある．そこで，サンプルレート変換の2次元処理を分離可能 (separable)[4] なものとする．すなわち2次元フィルタ K_{2D} を

$$K_{2D}(z_1, z_2) = K(z_1)K(z_2)$$

で構成する

4 設計例

ここでは，提案手法による解像度変換と従来法の Bicubic による解像度変換を比較する．設計のパラメータは以下のとおりである．

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad F_2(s) = \frac{1}{s+1},$$
$$h = 1, \quad M_1 = 2, \quad M_2 = 3,$$
$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3$$

図5のオリジナル画像に対して， $M_1/M_2 = 2/3$ の解像度変換を行う．図6は Bicubic 法による解像度変換により得られた画像である．この処理には Photoshop CS [1] を用いた．いっぽう，提案手法による解像度変換を図7に示す．従来法のぼけが提案手法によって改善されていることがわかる．



図 5: Original image

5 おわりに

本研究は画像処理における解像度変換のためのサンプルレート変換器の設計をサンプル値 H^∞ 設計問題として定式化し，誤差系をノルムに関して等価変換することにより離散時間 H^∞ 最適化問題へと帰着した．また，数値例により，従来法よりもより良い処理が行えることを示した．



図 6: Bicubic interpolation



図 7: Sampled-data H^∞ interpolation

参考文献

- [1] Adobe Systems, Photoshop CS, Adobe Systems (2004)
- [2] K. R. Castleman, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, (1996)
- [3] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, New York (1995)
- [4] W.-S. Lu and A. Antoniou, *Two-dimensional Digital Filters*, Marcel Dekker (1992)
- [5] M. Nagahara and Y. Yamamoto, "A new design for sample-rate converters," *Proc. of 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 4296–4301 (2000)
- [6] M. Nagahara and Y. Yamamoto, "Optimal design of fractional delay filters," *Proc. of 42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 6539–6544 (2003)
- [7] P. P. Vidyathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1993)