

半正定値計画法を用いたマルチレートデジタルフィルタ設計

Design of multirate digital filters by semi-definite programming

永原 正章 (京都大学), 山本 裕 (京都大学), スティーブン P. ボイド (スタンフォード大学)

M. Nagahara (Kyoto University), Y. Yamamoto (Kyoto University),

S. P. Boyd (Stanford University)

Abstract This paper proposes a new design methodology for interpolators, based on the modern sampled-data control theory. In contrast to the conventional filter designs where the methods are mostly based on frequency domain approximation techniques, the proposed method makes use of the sampled-data H^∞ control theory, thereby allowing for optimizing the intersample behavior and aliasing effects. The method is executable for high conversion ratio by semi-definite programming.

1 はじめに

デジタルフィルタ設計には、窓関数法や等リプルフィルタ、双一次変換法など様々な設計手法がある [6, 8]。これらの手法は、ある望ましい特性（例えば理想ローパス特性）を近似する手法であり、その近似には対象となる信号処理系全体の特性は考慮されていない。したがって設計の際には、それぞれの信号処理系に応じて近似手法を適切に選ぶ必要がある。また、これらの設計法は、元の連続時間信号がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定して離散時間領域での議論となっている。しかし現実には連続時間信号を完全に帯域制限することは不可能であり、元信号にはナイキスト周波数以上の成分も含まれる。したがって、より厳密な設計をするためには、連続時間信号と離散時間信号が混在したサンプル値系として信号処理系を捉えなければならない。

この問題に対し、[3] ではデジタルフィルタ設計にサンプル値 H^∞ 制御理論を導入し、連続時間信号に対する最適信号復元問題が議論されている。この手法により、ナイキスト周波数以上の周波数成分をも考慮した設計が可能となる。この研究以降、サンプル値制御理論を用いたデジタル信号処理系の研究が行われている（たとえば [4]）。

本研究では、これらの研究をもとに FIR (Finite Impulse Response) 型インターポレーションフィルタ設計にサンプル値制御理論を導入し、信号復元の最適化を H^∞ 設計により行う。

本研究で考慮する信号処理系は複数のサンプル周波数が存在するマルチレート系であり、また信号の復元に連続時間の遅れを許すため無限次元系となる。本稿では、これを離散時間リフティングを用いて単一レート系へと変換し、ファーストサンプル・ファーストホールド (FSFH) 近似 [7] を用いて有限次元離散時間系へと変換する。

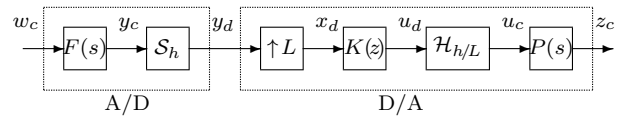


図 1: インターポレータの信号処理系

従来の設計法 [4] では、インターポレータにおけるアップサンブラの定数が大きい場合、設計問題が大きくなりすぎて現実的な時間では解けなかった。本研究では、問題を半正定値計画問題 [5] として定式化することにより、現実的な時間で大きな規模の問題が解けることを示す。

2 問題設定

本節ではインターポレータの設計問題を定式化する。

図 1 のブロック線図は、アナログ入出力を含めたインターポレータの信号処理系を示している。アナログの入力信号 $w_c \in L^2[0, \infty)$ にたいして連続時間ローパスフィルタ $F(s)$ を作用させ信号 y_c を得る。この信号 y_c は周波数特性 $F(s)$ を持つアナログ信号であり、 $F(s)$ は離散化されるべき信号源の先見情報であると考えられることができる。従来のデジタル信号処理では、この $F(s)$ という特性は考慮されていない¹。次にこの信号 y_c はサンプル周期 h で動作するサンブラ S_h によって離散時間信号 y_d に変換される。この信号はデジタル装置へ記録されたり、またデジタル通信路を通して伝送される。

デジタル信号 y_d から元信号 y_c を復元するさいに、離散化したときのサンプル周期よりも速い周期で動作するホールド要素を用いてアナログ信号に変換するシステムがオーバーサンプル D/A 変換器である [6, 8]。このオーバーサンプル D/A 変換器では図 1 のようにイン

¹ 離散時間領域での取り扱いでは、 $F(s)$ はナイキスト周波数以下にカットオフ周波数を持つ理想フィルタである。

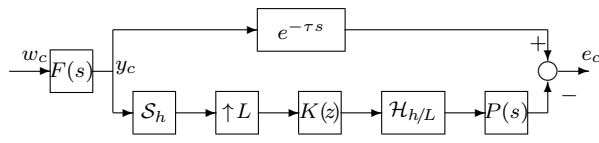


図 2: インターポレータ設計の誤差系

ターポレータ $K(z)(\uparrow L)$ が用いられる．この信号の流れは次のようになる: 離散時間信号 y_d がアップサンブラ $\uparrow L$ によってサンプル周期 h/L の離散時間信号 x_d に変換される．アップサンプルされた信号にはイメージング成分が生じるので [6, 8], これを除去するためにデジタルフィルタ $K(z)$ をほどこす．ここでフィルタ $K(z)$ は FIR フィルタ

$$K(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^{-k}$$

とする．この出力信号 u_d は, サンプル周期 h/L で動作する 0 次ホールド $\mathcal{H}_{h/L}$ により連続時間信号 u_c に変換される．このホールド出力信号はアナログフィルタ $P(s)$ によって平滑化され出力信号 z_c が得られる．

ここでの設計目的は, 与えられた $F(s), P(s), L$ にたいしてアナログの入力信号 y_c を忠実に復元するようなデジタルフィルタ $K(z)$ を求めることである．そこで元信号とインターポレータの出力を比較するために図 2 のブロック線図を考える．ここで, 信号の復元処理にはある程度の時間遅れが許されるため $\tau := mh$ (m は非負の整数) の時間遅れ e^{-mhs} を挿入する．このブロック線図において入力信号 w_c から誤差信号 $e_c(t) := z_c(t) - u_c(t - mh)$ までのシステムを \mathcal{T} とおく．このとき設計問題は次のように定式化される:

問題 1 安定かつ厳密にプロパな $F(s)$ および安定かつプロパな $P(s)$, アップサンブラ定数 L , 遅れステップ m が与えられたとする．このとき与えられた正数 γ にたいして,

$$\|\mathcal{T}\| := \sup_{w_c \in L^2[0, \infty)} \frac{\|\mathcal{T}w_c\|_2}{\|w_c\|_2} < \gamma, \quad (1)$$

を満たす FIR フィルタ $K(z)$ の係数 $\alpha_k, k = 0, 1, \dots, L$ を求めよ．

3 有限次元問題への帰着

問題 1 は連続時間の時間遅れ要素を含む無限次元系の設計問題であり, またアップサンブラ ($\uparrow L$) を含むマルチレート系の設計問題でもある．

本節では, ファーストサンプルファーストホールド近似 [7] を用いて, この問題が有限次元単一レート系の設計問題に帰着されることを示す．なお, 簡単のため, FIR フィルタのタップ数を $n = L$ とする．

まず離散時間リフティングを定義する．

$$\mathbf{L}_L := (\downarrow L) \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{L-1} \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{L}_L^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-L+1} \end{bmatrix} (\uparrow L).$$

つぎの定理が成り立つ．

定理 1 インターポレータの誤差系 \mathcal{T} にたいして, 有限次元離散時間系 $\{G_{1,N}, G_{2,N}^{(k)} : k = 0, 1, \dots, L, N = 1, 2, \dots\}$ が存在して, 次式が成り立つ．

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| G_{1,N} + \sum_{k=0}^L \alpha_k G_{2,N}^{(k)} \right\|_{\infty} = \|\mathcal{T}\|.$$

証明 離散時間リフティング (2) を用いて, インターポレータ $K(z)(\uparrow L)$ は次のように書ける．

$$K(z)(\uparrow L) = \mathbf{L}_L^{-1} \tilde{K}(z),$$

$$\tilde{K}(z) := \mathbf{L}_L K(z) \mathbf{L}_L^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \sum_{k=0}^L \alpha_k \phi_k(z).$$

ただし

$$\phi_0(z) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\phi_1(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\dots$$

$$\phi_{L-1}(z) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\phi_L(z) := \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

ここで $\tilde{K}(z)$ は 1 入力 L 出力の LTI システムであり, マルチレート信号処理におけるポリフェーズ表現 [6, 8] に相当する．つぎに一般化ホールド $\tilde{\mathcal{H}}_h$ を導入する．

$$\tilde{\mathcal{H}}_h := \mathcal{H}_{h/L} \mathbf{L}_L^{-1}.$$

以上より図 2 のマルチレート系は図 3 の単一レート系へと等価変換される．

つぎにサンプル値系図 3 にたいして FSFH (ファーストサンプルファーストホールド) 近似 [7] を導入する．FSFH 手法とは, 周期 h のサンプル値系の連続時間入出力を, 周期 h/N (N は自然数) のサンブラとホー

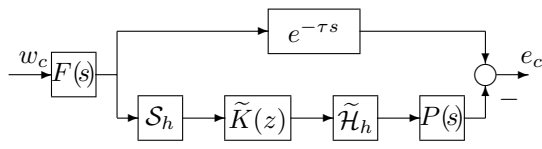


図 3: 単一レート系への変換

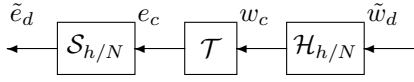


図 4: FSFH 離散化

ルドによって離散化し，系を近似的に離散時間系へ変換する手法である（図 4）．この手法により，周期 h のサンプル値系 \mathcal{T} にたいして近似離散時間系

$$\begin{aligned} T_N(z) &:= G_{1,N}(z) + G_{21,N}(z)\tilde{K}(z)G_{22,N}(z) \\ &= G_{1,N}(z) + \sum_{k=0}^L \alpha_k G_{2,N}^{(k)} \\ G_{2,N}^{(k)} &:= G_{21,N}(z)\phi_k(z)G_{22,N}(z) \end{aligned}$$

が得られ（付録参照），さらに文献 [7] により， $N \rightarrow \infty$ で $\|T_N\|_\infty \rightarrow \|\mathcal{T}\|$ となる．□

4 半正定値計画問題としての定式化

前節までで，サンプル値系の設計問題は離散時間系の設計問題へ帰着された．すなわち，問題は以下の最適化問題として定式化される．

問題 2 評価関数

$$J(\alpha) := \max_{\omega \in [0, \pi/h]} \left\| G_{1,N}(e^{j\omega h}) + \sum_{k=0}^L \alpha_k G_{2,N}^{(k)}(e^{j\omega h}) \right\|$$

を最小化する FIR フィルタ係数 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L)$ を求めよ．

この問題は $\omega \in [0, \pi/h]$ が連続パラメータであり，線形半無限計画問題として定式化されるが [2]，本研究では，周波数 ω を有限個に分割し半正定値計画問題として定式化する．すなわち，周波数を次のように分割する．

$$0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_\omega} \leq \pi/h$$

すなわち，問題 2 の最適化問題を次の問題で近似する．

問題 3 [周波数の分割] 評価関数

$$J_{n_\omega}(\alpha) := \max_{\omega = \omega_1, \dots, \omega_{n_\omega}} \left\| G_{1,N}(e^{j\omega h}) + \sum_{k=0}^L \alpha_k G_{2,N}^{(k)}(e^{j\omega h}) \right\|$$

を最小化する FIR フィルタ係数 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L)$ を求めよ．

この問題 3 を半正定値計画問題に定式化する．まず

$$\begin{aligned} A_i &:= G_{1,N}(e^{j\omega_i h}), \quad B_{ik} := G_{2,N}^{(k)}(e^{j\omega_i h}), \\ A_i^R &:= \text{Re } A_i, \quad A_i^I := \text{Im } A_i, \\ B_{ik}^R &:= \text{Re } B_{ik}, \quad B_{ik}^I := \text{Im } B_{ik} \\ i &= 1, 2, \dots, n_\omega, \quad k = 0, 1, \dots, L \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &\left\| G_{1,N}(e^{j\omega h}) + \sum_{k=0}^L \alpha_k G_{2,N}^{(k)}(e^{j\omega h}) \right\| \\ &= \left\| \left(A_i^R + \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^R \right) + j \left(A_i^I + \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^I \right) \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} A_i^R + \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^R & -A_i^I - \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^I \\ A_i^I + \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^I & A_i^R + \sum_{k=0}^L \alpha_k B_{ik}^R \end{bmatrix} \right\| \\ &=: \|X_i(\alpha)\|, \quad i = 1, 2, \dots, n_\omega \end{aligned}$$

と書ける．したがって，問題 3 は次のように定式化できる．すなわち，

$$\|X_i(\alpha)\| \leq t, \quad i = 1, 2, \dots, n_\omega \quad (3)$$

の制約条件のもとで t を最小化するような α を求めよ．ここで (3) の不等式条件は以下の不等式条件と等価である．

$$\begin{bmatrix} tI & X_i(\alpha) \\ X_i(\alpha)^T & tI \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_\omega$$

したがって，問題 3 は以下の半正定値計画問題に定式化された．

問題 4 [半正定値計画問題] 不等式制約条件

$$\begin{bmatrix} tI & X_i(\alpha) \\ X_i(\alpha)^T & tI \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_\omega$$

のもとで t を最小化するような α を求めよ．

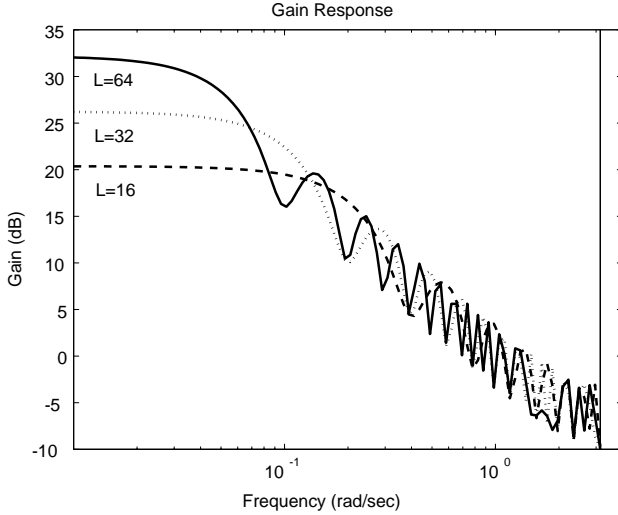


図 5: フィルタ $K(z)$ のゲイン応答

5 設計例

ここでは, $L = 16, 32, 64$ のインターポレータを前節までで定式化した半正定値計画問題を解くことにより設計する. まず $F(s), P(s)$ として次のフィルタを用いる.

$$F(s) = \frac{1}{s+1}, \quad P(s) = 1.$$

また, サンプル周期を $h = 1$, FSFH の分割数を $N = L$ (すなわち $N = 16, 32, 64$), むだ時間を $m = 0$, 周波数の分割を 0 [rad/sec] から π [rad/sec] まで等間隔に 6 分割とする. 設計によって得られたインターポレーションフィルタのゲイン応答を図 5 に示す.

6 おわりに

本論文では, マルチレート信号処理におけるインターポレータの設計問題をサンプル値 H^∞ 制御の枠組みで定式化した. また, そのサンプル値制御問題に対して等価離散時間系が存在することを示し, 半正定値計画問題として定式化した. 本論文では省略したが, 提案した手法と同様にして, デシメータのサンプル値最適化設計も半正定値計画問題として定式化できる.

なお, 半正定値計画問題 4 における行列 $X_i(\alpha)$ はその要素がほとんど 0 の疎行列である. この構造をうまく利用することにより, 数値計算に必要なメモリのサイズを小さくすることが可能であると考えられ, 今後の課題である.

A 付録

定理 1 中の $G_{1,N}, G_{21,N}, G_{22,N}$ は以下で与えられる.

$$G_{1,N}(z) := z^{-m} F_{dN}(z),$$

$$G_{21,N}(z) := -P_{dN}(z)H, \quad G_{22,N} := S F_{dN}(z)$$

$$F_{dN} := \mathbf{L}_N \mathbf{S}_{h/N} F \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1},$$

$$P_{dN} := \mathbf{L}_N \mathbf{S}_{h/N} P \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1},$$

$$S := \underbrace{[1, 0, \dots, 0]}_{N-1},$$

$$H := \underbrace{\begin{bmatrix} q & & \\ & \ddots & \\ & & q \end{bmatrix}}_{L \text{ blocks}}, \quad q := \left. \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} l.$$

F_{dN}, P_{dN} の状態空間実現は [1] などを参照のこと.

参考文献

- [1] T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, New York (1995)
- [2] 平林, 陶山: デジタルフィルタ設計への数理計画法の応用, システム/制御/情報, Vol. 47, No. 6, pp. 284–289 (2003)
- [3] P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto: Delayed signal reconstruction using sampled-data control, *Proc. of 35th Conf. on Decision and Control*, pp. 1259–1263 (1996)
- [4] 永原, 山本: インターポレータのサンプル値 H^∞ 設計, システム制御情報学会論文誌, Vol. 14, No. 10, pp. 483–489 (2001)
- [5] L. Vandenberghe, S. Boyd: Semidefinite Programming, *SIAM Review*, Vol. 38, pp. 49–95 (1996)
- [6] P. P. Vidyathan: *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1993)
- [7] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems, *Automatica*, vol. 35, pp. 729–734 (1999)
- [8] G. Zelniker and F. J. Taylor: *Advanced Digital Signal Processing: Theory and Applications*, Marcel Dekker (1994)