

# 非整数遅延フィルタの最適設計

## An optimal design of fractional delay filters

京都大学大学院 情報学研究科 永原 正章, 山本 裕

M. Nagahara and Y. Yamamoto

Graduate School of Informatics, Kyoto University

**Abstract** A fractional delay filter is a digital filter which is designed to have a delay which is less than the sampling time. Conventionally fractional delay filters have been designed in discrete-time domain assuming that the input signals were bandlimited. However, in real system the input signals are not bandlimited and the operation is an interpolation between samples, therefore we have to take account of intersample, that is, the systems have to be desired as sampled-data systems. We propose an optimal design of fractional delay filters via sampled-data  $H^\infty$  method. We show that by the lifting method the problem can be reduced to one in the discrete-time domain, and the optimal filter is obtained easily. Moreover an explicit formula of the optimal filter is given under an assumption.

### 1 はじめに

非整数遅延フィルタ (fractional delay filter) とはデジタルフィルタの一種であり, サンプル周期以下の遅延を達成するように設計されたフィルタである. このフィルタは信号処理のさまざまな分野で実際に用いられており, デジタル通信や音声信号処理, 楽器のデジタルモデリング等に応用されている [2, 3]. 例えば, デジタル通信においては, 受信信号の連続時間パルス信号列をサンプリングしてビットやシンボルを決定するが, そのパルス列の周期とサンブラの周期を同期させるために非整数遅延フィルタが用いられる [2, 3].

従来の非整数遅延フィルタの設計は理想特性を近似する手法が主であり, その設計は入力信号がナイキスト周波数以下に帯域制限されているという仮定の元での離散時間領域における設計である. しかし, 実際のアナログ信号を考えると, 信号が完全に帯域制限されているという仮定は妥当ではなく, また非整数遅延フィルタの処理にはサンプル点間の応答を考慮する必要があるため, 設計はアナログ信号とデジタル信号が混在したサンプル値系ととらえる必要がある.

したがって本論文では, 非整数遅延フィルタの設計問題をサンプル値系の設計問題として定式化する. すなわち理想的な非整数遅延フィルタと設計フィルタの誤差系を考え, アナログ信号を含めた上で誤差を最小化するようなフィルタを設計する. ここで最適化には  $H^\infty$  評価規範を用いる. このサンプル値  $H^\infty$  最適化問題はリフティング [4] を用いることにより離散時間の  $H^\infty$  最適化問題に帰着させることができる. さらに, 入力信号の周波数特性が1次のローパス特性であると仮定した場合, 最適なフィルタを陽に求めることができることを示す.

最後に数値例によって本設計の有効性を確認する.

### 2 非整数遅延フィルタの設計問題

#### 2.1 非整数遅延フィルタ

連続時間信号  $x(t)$  を考える. 図1の(a)は連続時間信号にたいする遅延, (b)は離散時間信号にたいする遅延である. ただし, 遅延の幅を  $D$  とし, 任意の実数 (ただし  $D < h$ ) をとるものとする. 通常, 離散時間信号にたいする遅延は, サンプル幅の整数倍, すなわち  $z^{-m}$  の  $z$  変換であらわされるシステムである. しかし, 応用によっては整数倍ではなく, 任意の実数だけ遅らせたい場合がある. すなわち図1において, (b)の上側の信号  $x(n)$  (すなわち, そのままサンプルした信号) から (b)の下側の信号  $x(n-D)$  (連続時間の遅延をほどこした後に, サンプルした信号) を得ることを考える. これは信号  $x(n)$  を入力とし  $x(n-D)$  を出力とするフィルタを考えることに相当する. この働きをするフィルタを非整数遅延フィルタと呼ぶ.

#### 2.2 非整数遅延フィルタ設計の問題設定

上のように考えると, 非整数遅延フィルタ設計は図2の誤差系を考えることによって定式化できる. この誤差系において  $F(s)$  は入力信号 (連続時間信号) の周波数特性をあらわす. したがって信号  $v$  が非整数遅延フィルタの入力信号となる. 誤差系の上側のパスは, 理想的な非整数遅延フィルタをあらわす. すなわち, 入力信号  $v$  が時間  $D$  だけ遅らされ, そしてサンブラ  $S_h$  によって離散時間信号  $z_d$  を得る. 下側のパスは, 実際に実装される非整数遅延フィルタの信号の流れをあらわす. すな

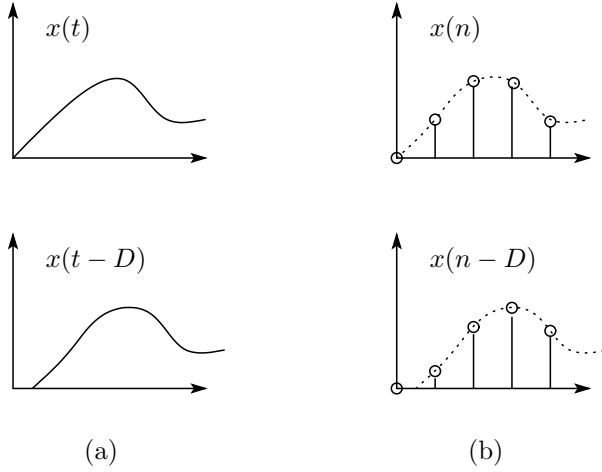


図 1: (a) 連続時間における遅延, (b) 離散時間における遅延

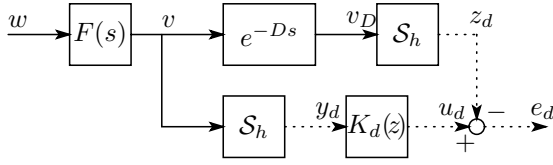


図 2: 非整数遅延フィルタ設計の誤差系

わち入力信号  $v$  は, まず  $S_h$  によってサンプルされたのち, フィルタ  $K_d(z)$  によって処理され, 出力信号  $u_d$  を得る.

理想出力  $z_d$  と実際のフィルタ出力  $u_d$  の誤差を  $e_d := z_d - u_d$  とおくと, 設計問題は  $e_d$  をなるべく小さくするようにフィルタ  $K_d(z)$  を設計する問題となる.

そこで本論文では, 図 2 の誤差系にたいしてサンプル値  $H^\infty$  最適設計を行う. すなわち, 図 2 において  $w$  から  $e_d$  までのシステムを  $\mathcal{T}_{ew}$  とおくと, 設計問題は次のように定式化できる.

問題 1 図 2 の誤差系  $\mathcal{T}_{ew}$  に対して

$$\|\mathcal{T}_{ew}\|_\infty := \sup_{w \in L^2} \frac{\|e_d\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}} \quad (1)$$

を最小化するデジタルフィルタ  $K_d(z)$  を求めよ.

### 3 非整数遅延フィルタの設計

#### 3.1 リフティングによる誤差系の表現

まず図 2 における  $F(s)$  の実現を  $\{A, B, C, 0\}$  とおく. 図 2 における連続時間信号  $w$  および  $v$  にたいしてリフティング [4] をほどこす. すなわち, リフティングの変換を  $\mathcal{L}$  とし,  $\tilde{w} := \mathcal{L}w$ ,  $\tilde{v} := \mathcal{L}v$  とおく<sup>1</sup>. 連続時間信

<sup>1</sup>このとき  $\tilde{w}[n](\theta) = w(nh + \theta)$  と書く.  $\tilde{v}$  も同様.

号をリフティングしたことにより, 図 2 のサンプル値誤差系は図 3 の離散時間系に変換できる.

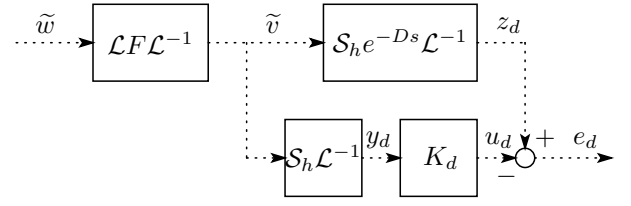


図 3: リフティングされた誤差系

このとき図 3 のリフティングされた誤差系の状態空間表現は以下のようになる.

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_d x[n] + B \tilde{w}[n], \\ e_d[n] &= C_e x[n] - u_d[n], \\ y_d[n] &= C_y x[n], \\ u_d &= K_d y_d, \\ A_d &:= \begin{bmatrix} e^{Ah} & 0 \\ C e^{A(h-D)} & 0 \end{bmatrix}, \\ B \tilde{w} &:= \begin{bmatrix} \int_0^h e^{A(h-\tau)} B \tilde{w}(\tau) d\tau \\ \int_0^{h-D} C e^{A(h-D-\tau)} B \tilde{w}(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \\ C_e &:= [0, I], \quad C_y := [C, 0]. \end{aligned} \quad (2)$$

#### 3.2 等価離散時間系による設計

状態空間表現 (2) で表されるシステムは無限次元の作用素  $B$  を含む離散時間系であるが,  $B$  の双対作用素  $B^*$  を導入することにより, システムの誘導ノルムを変えずに有限次元の離散時間系へ変換することができる. ここで  $B$  の双対作用素  $B^*$  は次式で表される.

$$\begin{aligned} B^* &= \begin{bmatrix} B_1^* & B_2^* \end{bmatrix}, \\ B_1^* u &:= B^T e^{A^T(h-\theta)} u, \\ B_2^* u &:= \chi_{[0, h-D]}(\theta) B^T e^{A^T(h-d-\theta)} C^T u, \\ \theta &\in [0, h], \\ \chi_{[0, h-D]}(\theta) &:= \begin{cases} 1 & (\theta \in [0, h-D]), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \end{aligned}$$

この作用素  $B$  にたいして次の補題が成り立つ.

補題 1 作用素  $B$  にたいして, 行列  $B_d$  が存在して

$\mathbf{B}\mathbf{B}^* = B_d B_d^T$  が成り立つ．ここで，

$$B_d B_d^T = \begin{bmatrix} M(h) & e^{AD} M(h-D) C^T \\ CM(h-D) e^{A^T D} & CM(h-D) C^T \end{bmatrix},$$

$$M(t) := \int_0^t e^{A\theta} B B^T e^{A^T \theta} d\theta. \quad (3)$$

証明 文献 [1] の第 10 章などを参照のこと．□

この補題を用いると，サンプル値系  $\mathcal{T}_{ew}$  とノルムが等しい離散時間系  $T_{ew}$  を得ることができる．

定理 1 サンプル値系  $\mathcal{T}_{ew}$  にたいして，離散時間系  $T_{ew}$  が存在して

$$\|\mathcal{T}_{ew}\| = \|T_{ew}\|$$

が成り立つ．

証明 状態空間表現 (2) にたいして， $w_d := \mathbf{B}\tilde{w}$  とおき， $w_d$  から  $e_d$  までのシステムを  $T_d$  とおくと， $\mathcal{T}_{ew} = T_d \mathbf{B}$  であり  $T_d$  は離散時間系となる．したがって補題 1 を用いれば

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{ew}\|^2 &= \|T_d \mathbf{B}\|^2 = \|T_d \mathbf{B} (T_d \mathbf{B})^*\| \\ &= \|T_d \mathbf{B} \mathbf{B}^* T_d^*\| = \|T_d B_d B_d^T T_d^*\| = \|T_d B_d\|^2 \end{aligned}$$

となり， $T_{ew} := T_d B_d$  とおくことによって離散時間系を得る．□

離散時間系  $T_{ew}$  の状態空間表現は (2) において  $\mathbf{B}$  を  $B_d$  に置き換えたものとなる．すなわち図 4 の離散時間系にたいして離散時間  $H^\infty$  設計をして，フィルタ  $K_d(z)$  を求めればよい．

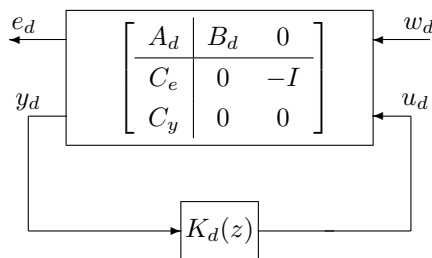


図 4: ノルム等価離散時間系

### 3.3 遅れ $D$ を可変とした場合の設計

前節で求めた離散時間系を用いて  $H^\infty$  設計を行う場合，遅れパラメータ  $D$  は固定しなければならない．しかし，実際の応用では，遅れパラメータ  $D$  は可変であることが望ましい場合が多い．すなわち，遅れパラメータ  $D$  を固定せずに最適なフィルタ  $K_d(z)$  を求めたい．この節では，図 2 における  $F(s)$  を 1 次のローパスフィルタ，すなわち

$$F(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

と仮定することにより，このようなフィルタを求めることができることを示す．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 2 連続時間フィルタ  $F(s)$  を上記の 1 次フィルタとする．このとき，(1) のノルムを最小化するフィルタは

$$K_d(z) = \frac{b_0 \omega_c e^{-\omega_c(h-D)} + (z - e^{-\omega_c h}) b_1(D)}{b_0 \omega_c z},$$

$$b_0 := \sqrt{\frac{1 - e^{-2\omega_c h}}{2\omega_c}}, \quad (4)$$

$$b_1(D) := \sqrt{\frac{\omega_c}{2}} \cdot \frac{e^{-\omega_c D} (1 - e^{-2(h-D)\omega_c})}{\sqrt{1 - e^{-2\omega_c h}}}$$

与えられる．さらに，このときの最適値は

$$\|\mathcal{T}_{ew}\| = b_2(D) := \sqrt{\frac{\omega_c \sinh(\omega_c D) \sinh(h-D)\omega_c}{\sinh(\omega_c h)}} \quad (5)$$

となる．

証明 まず，簡単な計算により (3) の  $B_d B_d^T$  は

$$B_d B_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-2\omega_c h}}{2\omega_c} & \frac{e^{-\omega_c D} (1 - e^{-2\omega_c(h-D)})}{2} \\ \frac{e^{-\omega_c D} (1 - e^{-2\omega_c(h-D)})}{2} & \frac{2(1 - e^{-2\omega_c(h-D)})}{\omega_c} \end{bmatrix}$$

と書ける．これを Cholesky 分解すれば

$$B_d = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ b_1(D) & b_2(D) \end{bmatrix}$$

となる．ただし， $b_0$ ， $b_1(D)$ ， $b_2(D)$  は定理の中で定義された値である．ここで，図 4 の離散時間系  $T_{ew}$  は次のようになる．

$$\begin{aligned} T_{ew}(z) &= (C_e - K_d(z) C_y) \{zI - A_d\}^{-1} B_d \\ &= \frac{1}{z(z - e^{-\omega_c h})} \begin{bmatrix} G_1(z) & G_2(z) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$G_1(z) := b_0\omega_c e^{-\omega_c(h-D)} + (z - e^{-\omega_c h})b_1(D) - b_0\omega_c z K_d(z),$$

$$G_2(z) := b_2(D)(z - e^{-\omega_c h}).$$

ここで  $G_2(z)$  は  $K_d(z)$  によって変えることができないシステムであるから,  $\|T_{ew}\|$  の最小値は  $G_2(z) = 0$  とすることによって達成される. すなわち, (4) が得られる. このときのノルムは

$$\|T_{ew}\| = \|G_2(z)\| = b_2(D)$$

となる. □

この最適フィルタは 1 次の FIR フィルタとなることに注意されたい.

#### 4 設計例

本節ではこれまでで示した手法を用いて, 非整数遅延フィルタの設計例を示す. ここで, サンプリング周期は  $h = 1[\text{sec}]$  とし,  $F(s)$  としては  $\omega_c = 0.5[\text{rad/sec}]$  にカットオフ周波数を持つ 1 次ローパスフィルタを用いる. 定理 2 の公式を用いて, フィルタ  $K_d(z)$  を求める. ただし  $D = 0.8$  とする. 得られたフィルタの周波数応答を図 5, 6 に示す. 次に図 2 の  $w$  を正弦波, すなわち

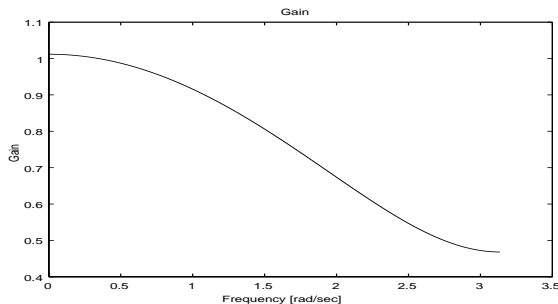


図 5: 最適フィルタのゲイン線図

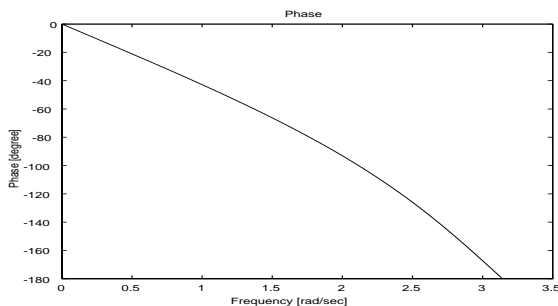


図 6: 最適フィルタの位相線図

$w(t) = \sin(0.5t)$  としたときの設計フィルタの出力  $u_d$  および  $v_D := e^{-Ds}w$  の時間応答を図 7 に示す. この時

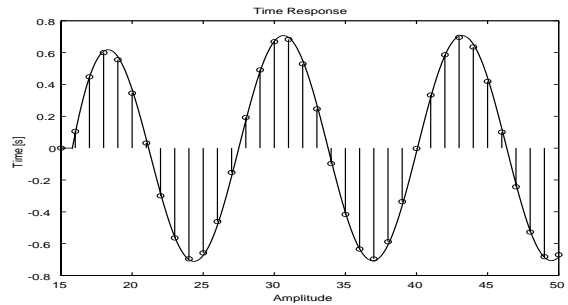


図 7: 時間応答

間応答より, 最適フィルタによってもとのアナログ信号が復元されており, 非整数遅延が達成されていることがわかる.

#### 5 おわりに

本稿では, 非整数遅延フィルタ設計をサンプル値  $H^\infty$  最適設計を用いて定式化した. この設計問題は, リフティングを用いることにより, ノルムを変えることなく離散時間系の設計問題に帰着される. また, 入力 of 連続時間信号が 1 次のローパスフィルタでモデル化できると仮定すれば, 遅れ時間  $D$  を可変とした最適フィルタが設計できることを示した. 2 次以上の場合については今後の課題としたい.

#### 参考文献

- [1] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-data Control Systems*, Springer (1995)
- [2] T. I. Laakso, V. Välimäki, M. Karjalainen and U. K. Laine, Splitting the unit delay, *IEEE Signal Process. Mag.*, , vol. 13, no. 1, pp. 30–60 (1996)
- [3] V. Välimäki and T. I. Laakso, Principles of fractional delay filters, *IEEE ICASSP'00*, pp. 3870–3873 (2000)
- [4] Y. Yamamoto, “New approach to sampled-data systems: a function space method,” *Proc. 29th Conf. on Decision and Control*, pp. 1881–1887, 1990.