

連続時間伝達特性を考慮した filtered- x LMS アルゴリズム

Filtered- x LMS algorithm considering continuous-time behavior

永原 正章[†]

山本 裕[†]

[†] 京都大学大学院情報学研究科

Masaaki NAGAHARA[†]

Yutaka YAMAMOTO[†]

[†]Graduate School of Informatics, Kyoto University

アブストラクト 従来の filtered- x LMS アルゴリズムの解析では、2次経路の伝達特性は離散時間システムとして扱われる。しかし、例えばアクティブ消音のシステムを考えると、2次経路は連続時間システムである。したがって、そのようなシステムは、連続時間システムと離散時間システム、およびAD/DA変換回路を含むハイブリッドシステムとして扱う必要がある。本稿では、サンプル値制御理論におけるリフティングの技法を用いて、2次経路の連続時間特性を考慮した新しい filtered- x LMS アルゴリズムを提案する。

Abstract Analysis of filtered- x LMS algorithm is conventionally done by assuming that the transfer function in the secondary path is a discrete-time system. However, in real systems such as active noise control the secondary path is a continuous-time system. Therefore, such a system should be analyzed as a hybrid system including discrete- and continuous- time systems and AD/DA devices. In this article, we propose a new algorithm taking account of continuous-time behavior of the secondary path via lifting technique in sampled-data control theory.

1 はじめに

近年のデジタル技術の発展により、信号処理ではデジタル機器を用いて処理を行うのが一般的である。特に、本研究で考察するアクティブ消音システムでは、高速かつ高性能の DSP を用いることによって、高度な適応アルゴリズムを採用することが多い [2], [4]。

アクティブ消音システムにおける適応システムでは、通常の適応フィルタの場合 [3] と異なり、制御出力（スピーカ）から誤差信号を測定するマイクまでの2次経路に伝達特性が存在する。この2次経路による特性の変化を補償するために、参照信号をフィルタリングした信号を適応アルゴリズムに用いる方法があり、filtered- x 適応アルゴリズムと呼ばれる [5]。ここで用いられるフィルタは、2次経路の伝達関数をモデル化したものであり、通常は離

散時間システムである。現在の filtered- x 適応アルゴリズムのほとんどは、2次経路を離散時間システムと仮定して議論が進められている（例えば、[2], [5] など）。しかし、現実には2次経路は連続時間システムであり、アクティブ消音システムは、連続時間システムと離散時間システム、およびAD/DA変換回路を含むハイブリッドシステムとなる。したがって、それらの連続/離散時間特性を考慮した解析や設計が望ましい。このような観点からの設計方法は、いくつか提案されている。文献 [6] では、この方法は、アナログフィルタと適応デジタルフィルタの両方を用いることにより、2次経路の変化に対してロバストな消音システムを設計する方法である。しかし、アナログフィルタを実際に用いることは、システムの信頼性や保守性の面から、あまり歓迎されない。また、[4] では、参照信号を有限個の正弦波の重ね合わせで表現できると仮定し、連続時間システムの周波数応答を用いることにより適応アルゴリズムを導出しており、周波数選択型アルゴリズムと呼ばれる。この方法は、参照信号の周波数がわかっている場合は非常に有効な方法であるが、考慮していない周波数の入力に対してはノイズ除去ができない。また、周波数の数が多くなればなるほど制御器が複雑になる。

いっぽう、制御理論の分野では、連続時間で動作するシステムに対する離散時間コントローラの厳密な設計法として、リフティングと呼ばれる数学的手法を基礎としたサンプル値制御理論が90年代初めに提案された [8]。これにより、デジタル制御系の厳密な解析や設計が可能となった [1]。また、制御系だけでなく信号処理系への応用も盛んで、有効性が示されている [9]。そこで、本研究では、このリフティングを用いて、2次経路の連続時間特性を考慮した filtered- x LMS アルゴリズムの構成法を提案する。このような観点からの研究は、文献 [10] によって提案されており、本研究は、この研究に動機付けられたものである。文献 [10] では、リフティングの概念が陽には用いられていないが、本研究ではリフティング作用

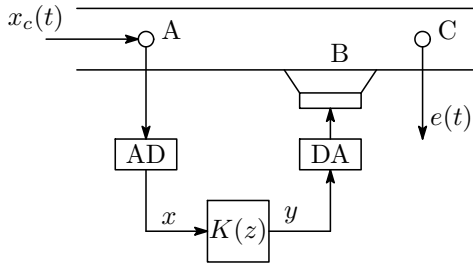


図 1: アクティブ消音システム

素のユニタリ性を陽に用いて、適応アルゴリズムの導出を行う。得られる適応アルゴリズムは連続時間信号の有限区間での積分表現を含むが、リフティングされた連続時間システムの状態空間表現を用いて、積分の近似計算を行うアルゴリズムを導出する。

記号

本論文では、以下の記号を用いる。

\mathbb{R}^n : \mathbb{R} (実数体) 上の n 次元ベクトル空間

ℓ^2 : 2 乗可和分の実数列の集合

L^2 : 区間 $[0, \infty)$ 上で 2 乗可積分な実関数の集合

L^2_{loc} : 区間 $[0, \infty)$ 上で局所 2 乗可積分な実関数の集合

$L^2_{[0,h]}$: 区間 $[0, h)$ 上で 2 乗可積分な実関数の集合

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$: Hilbert 空間 X の内積

$\| \cdot \|_X$: ノルム空間 X のノルム

A^\top : 行列 A の転置

2 filtered- x LMS アルゴリズム

図 1 のアクティブ消音システムを考える。この図において、 $x_c(t)$ はダクトに入力する雑音 (参照信号) であり、連続時間信号である。この信号を A 点に設置したマイクにより測定し、AD 変換器によりデジタル信号に変換する (これを x とする)。フィルタ $K(z)$ により、この信号が処理され、DA 変換器を介してスピーカ B から音として出力される。このシステムの目的は、デジタルの処理系 $K(z)$ をうまく設計することで、C 点での誤差信号 $e(t)$ をなるべく小さくすることである。

このシステムのブロック線図を図 2 に示す。この図において、 $P(s)$ は図 1 の A 点から C 点までの一次経路の伝達関数、また、 $F(s)$ は B 点から C 点までの二次経路の伝達関数であり、ともに連続時間システムである。AD 変換器は、サンプル周期 h で動作する理想サンブラ

$$(\mathcal{S}_h x_c)[k] := x_c(kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

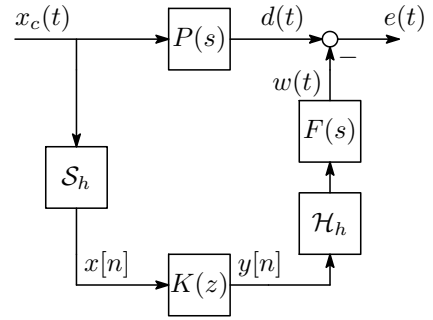


図 2: アクティブ消音システムのブロック線図

によってモデル化する。また、DA 変換器は周期 h で動作するゼロ次ホールド

$$\mathcal{H}_h : \ell^2 \ni y \mapsto y_c \in L^2, \quad y_c(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_0(t - kh)y[k],$$

とする。ここで $\beta_0(t)$ はホールド関数であり、次式で定義される。

$$\beta_0(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0, h), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本研究では、以下の問題を考える。

問題 1 次の評価関数

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)|^2 dt \quad (1)$$

を最小化する適応フィルタ

$$K[n](z) = \sum_{k=0}^N a_k[n]z^{-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

を求めよ。

この問題は、従来の適応フィルタの問題と異なり、連続時間の評価関数を最適化する離散時間フィルタを求める問題である。このような問題に対するアプローチとして、次節で述べるサンプル値制御理論が有効である。

3 サンプル値制御理論とリフティング

3.1 リフティング作用素

連続時間で動作するシステムに対する離散時間コントローラの厳密な設計法として、リフティングと呼ばれる数学的手法を基礎としたサンプル値制御理論が 90 年代初めに提案され [8]、デジタル制御系の厳密な解析や設計が可能となった [1]。また、制御系だけでなく信号処理系への応用も盛んで、有効性が示されている [9]。ここでは、サンプル値制御理論におけるリフティングを紹介し、リ

フティングを用いて、連続時間信号と離散時間信号を統一的に扱う手法について述べる。

連続時間信号 $f(t)$ を考える。 $f \in L^2_{loc}$ とする。このとき、リフティング作用素 \mathcal{L} を次式で定義する。

$$(\mathcal{L}f)[k] := \underline{f}[k] := \{f(kh + \theta), 0 \leq \theta < h\}, \quad (3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 h はサンプリング周期である。インデックス k を固定すると、 $\underline{f}[k]$ は $L^2_{[0,h]}$ の関数となる。すなわち、 \underline{f} は $L^2_{[0,h]}$ の関数列

$$\underline{f} = \{\underline{f}[0], \underline{f}[1], \underline{f}[2], \dots\}$$

であることがわかる。これは、関数を値にもつ離散時間信号である。

このリフティング作用素は、マルチレート信号処理におけるポリフェーズ表現 [7] を連続時間信号に拡張したものと解釈することもできる。すなわち、ポリフェーズ表現では、複数のサンプリングレートが存在するとき、ポリフェーズ分解によって最も低いレートで統一する。同様に、リフティングによって、連続時間信号を離散時間信号として表現することになる。

このリフティング作用素に対して、以下の補題が成り立つ [1]。

補題 1 $f \in L^2$ とする。このとき、

$$\|\mathcal{L}f\|^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \|(\mathcal{L}f)[k]\|^2_{L^2_{[0,h]}} < \infty$$

この補題より、 ℓ^2 を拡張した次の空間が自然に定義される。

$$\underline{\ell}^2 := \mathcal{L}L^2 = \{\mathcal{L}f : f \in L^2\}$$

この空間 $\underline{\ell}^2$ は Hilbert 空間であり、その内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{\ell}^2}$ は次式で定義される。

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{\underline{\ell}^2} := \sum_{k=0}^{\infty} \langle \underline{u}[k], \underline{v}[k] \rangle_{L^2_{[0,h]}}, \quad \underline{u}, \underline{v} \in \underline{\ell}^2$$

リフティング作用素には、次の補題に示すように非常に重要な性質がある。

補題 2 リフティング \mathcal{L} は、 L^2 から $\underline{\ell}^2$ への作用素で内積を保存する。すなわち、任意の $u, v \in L^2$ に対して、

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L}u, \mathcal{L}v \rangle_{\underline{\ell}^2}$$

が成り立つ。さらに、 \mathcal{L} は全単射であり、したがってユニタリ作用素である。

3.2 連続時間システムのリフティング

次の状態空間表現を持つ連続時間システム F を考える。

$$F : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4)$$

$$t \in [0, \infty), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

この入出力信号 u と y に対して、リフティングをほどこす。すなわち、 $\underline{u} := \mathcal{L}u$, $\underline{w} := \mathcal{L}y$ とおくと、連続時間システム F のリフティング $\underline{F} := \mathcal{L}F\mathcal{L}^{-1}$ の状態空間表現は次式で与えられる [1]。

$$\underline{F} : \begin{cases} \xi[n+1] = A_d \xi[n] + B \underline{u}[n] \\ \underline{w}[n] = C \xi[n] + D \underline{u}[n] \end{cases}$$

ここで、 A_d は次式で与えられる $n \times n$ の行列である。

$$A_d := e^{Ah}$$

いっぽう、 B, C, D は作用素であり、次式で与えられる。

$$B : L^2_{[0,h]} \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto \int_0^h e^{A(h-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$C : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2_{[0,h]} : x \mapsto Ce^{A\theta} x$$

$$D : L^2_{[0,h]} \rightarrow L^2_{[0,h]} : u \mapsto \int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$\theta \in [0, h)$$

すなわち、リフティングによって連続時間システムが離散時間システムとして表現できることがわかる。ただし、リフティングされたシステム \underline{F} は無限次元システムとなることに注意する。また、上式から明らかなように \underline{F} は線形時不変 (LTI, Linear Time Invariant) システムである。

次に、本研究で用いる、ゼロ次ホールド \mathcal{H}_h を含むシステム $F\mathcal{H}_h$ のリフティングを考える。このシステムの入力は離散時間信号であり、出力は連続時間信号である。したがって、出力をリフティングすることにより、 $F\mathcal{H}_h$ のリフティング $\underline{F}\mathcal{H}_h$ の状態空間表現が得られる [1]。

$$\underline{F}\mathcal{H}_h \begin{cases} \xi[n+1] = A_d \xi[n] + B_d u[n] \\ \underline{w}[n] = C \xi[n] + D_d u[n] \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 A_d と C は \underline{F} の状態空間表現における行列または作用素と同じであるが、 B_d (行列) と D_d (作用素) は次式で与えられる。

$$B_d = \int_0^h e^{A(h-\tau)} B d\tau \in \mathbb{R}^n$$

$$D_d : \mathbb{R} \rightarrow L^2_{[0,h]} : u \mapsto \left(\int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)} B d\tau \right) u$$

$$\theta \in [0, h)$$

これも無限次元の離散時間 LTI システムである。

4 リフティングを用いた filtered- x アルゴリズムの解析

4.1 適応アルゴリズムの導出

本節では、評価関数 (1) を前節のリフティングを用いて計算し、適応アルゴリズムを導出する。(1) より

$$\begin{aligned} J &= \langle e, e \rangle_{L^2} \\ &= \langle \underline{e}, \underline{e} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \underline{d} - \underline{w}, \underline{d} - \underline{w} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \underline{d}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} - \langle \underline{w}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} - \langle \underline{d}, \underline{w} \rangle_{\ell^2} + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

ここで、内積および作用素 $\underline{F}\mathcal{H}_h$ の線形性より

$$\begin{aligned} \langle \underline{w}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} &= \langle \underline{F}\mathcal{H}_h \underline{y}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \underline{F}\mathcal{H}_h \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} x, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ &= \sum_{k=0}^N a_k \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-k} x, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \underline{d}, \underline{w} \rangle_{\ell^2} \\ \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_{\ell^2} &= \langle \underline{F}\mathcal{H}_h \underline{y}, \underline{F}\mathcal{H}_h \underline{y} \rangle_{\ell^2} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_k a_l \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-k} x, \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-l} x \rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

となる。これより、評価関数 J を a_m ($m = 0, 1, 2, \dots, N$) で微分し、勾配を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_m} &= -2 \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-m} x, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ &\quad + 2 \sum_{l=0}^N a_l \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-m} x, \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-l} x \rangle_{\ell^2} \\ &= -2 \langle z^{-m} \underline{u}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} + 2 \sum_{l=0}^N a_l \langle z^{-m} \underline{u}, z^{-l} \underline{u} \rangle_{\ell^2} \\ &= -2 \langle z^{-m} \underline{u}, \underline{e} \rangle_{\ell^2} \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle \underline{u}[n-m], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\underline{u} := \underline{F}\mathcal{H}_h x$ である。この勾配をゼロとおき、最適な係数 $a := [a_0, a_1, \dots, a_N]$ を求めると、

$$\begin{aligned} a_{\text{opt}} &= T_{uu}^{-1} T_{ud} \\ T_{uu} &:= \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{\ell^2} & \dots & \langle \underline{u}, z^{-N} \underline{u} \rangle_{\ell^2} \\ \langle z^{-1} \underline{u}, \underline{u} \rangle_{\ell^2} & \dots & \langle z^{-1} \underline{u}, z^{-N} \underline{u} \rangle_{\ell^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle z^{-N} \underline{u}, \underline{u} \rangle_{\ell^2} & \dots & \langle z^{-N} \underline{u}, z^{-N} \underline{u} \rangle_{\ell^2} \end{bmatrix} \\ T_{ud} &:= \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ \langle z^{-1} \underline{u}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \\ \vdots \\ \langle z^{-N} \underline{u}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

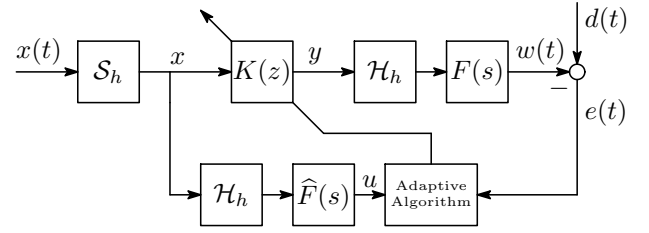


図 3: filtered- x 適応システム

また最適値 J_{opt} は

$$\begin{aligned} J_{\text{opt}} &= \langle \underline{d}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} - a_{\text{opt}}^{\top} T_{ud} \\ &= \langle \underline{d}, \underline{d} \rangle_{L^2} - a_{\text{opt}}^{\top} T_{ud} \end{aligned}$$

となる。

最適係数 a_{opt} は行列の積で求められるが、それぞれの要素は $k = 0, 1, 2, \dots$ にわたる無限和（または、無限区間 $[0, \infty)$ における積分）の計算が必要なため、アクティブ消音のような応用には用いることができない。また、2次経路 $F(s)$ を厳密に知ることは不可能であり、その推定値（モデル） $\hat{F}(s)$ を用いることになる。以上のことから、現実には以下の LMS アルゴリズム [3] を使用することとなる¹。

$$a[n+1] = a[n] + \mu \hat{T}_{ue}[n] \quad (6)$$

ただし、 $\hat{\underline{u}} := \hat{F}\mathcal{H}_h x$ として、

$$\hat{T}_{ue}[n] := \begin{bmatrix} \langle \hat{\underline{u}}[n], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \\ \langle \hat{\underline{u}}[n-1], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \\ \vdots \\ \langle \hat{\underline{u}}[n-N], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \end{bmatrix}$$

である。この適応則による filtered- x LMS 適応システムのブロック線図を図 3 に示す。この図からわかるように、ホールド要素 \mathcal{H}_h を含めた 2 次経路のコピー $\hat{F}\mathcal{H}_h$ を参照入力（のサンプル値） x に対して施すことになる。

4.2 近似アルゴリズム

LMS アルゴリズム (6) を実行するためには、行列 \hat{T}_{ue} の要素の $L^2_{[0,h]}$ -内積を計算する必要があるが、この値を厳密に計算することは現実的に不可能である。したがって、この内積（積分）を近似的に計算するアルゴリズムを考える。まず、区間 $[0, h]$ を L 個の小区間 $[0, h/L]$, $[h/L, 2h/L]$, \dots , $[h-h/L, h]$ に分割する。この小区間上

¹LMS は「最小二乗平均 (Least Mean Square) の略であるので、(1) の評価関数を用いるこのアルゴリズムは LMS とは言えない。しかし、全区間での評価 (1) の代わりに、その瞬時値を用いる手法は一般的な LMS アルゴリズムと同様であり、ここでも LMS アルゴリズムと呼ぶこととする。

で $\underline{e}[n](\theta)$ がほぼ一定であると仮定すると²,

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{\underline{u}}[n-m], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \\
&= \int_0^h \underline{e}[n](\theta)^\top \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \\
&= \sum_{l=0}^{L-1} \int_{lh/L}^{(l+1)h/L} \underline{e}[n](\theta)^\top \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \\
&= \sum_{l=0}^{L-1} \underline{e}[n](lh/L)^\top \int_{lh/L}^{(l+1)h/L} \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \\
&= e_d[n]^\top \hat{\underline{u}}_d[n-m]
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
e_d[n] &:= \begin{bmatrix} \underline{e}[n](0)^\top \\ \underline{e}[n](h/L)^\top \\ \vdots \\ \underline{e}[n](h-h/L)^\top \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e(nh)^\top \\ e(nh+h/L)^\top \\ \vdots \\ e(nh+h-h/L)^\top \end{bmatrix} \\
u_d[n] &:= \begin{bmatrix} \int_0^{h/L} \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \\ \int_{h/L}^{2h/L} \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_{h-h/L}^h \hat{\underline{u}}[n-m](\theta) d\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \int_0^{h/L} \hat{\underline{u}}(nh+\theta) d\theta \\ \int_{h/L}^{2h/L} \hat{\underline{u}}(nh+\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_{h-h/L}^h \hat{\underline{u}}(nh+\theta) d\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

次に上式の $\hat{\underline{u}}[n]$ の積分について考える. いま, $\hat{\underline{u}}[n] = (\hat{F}\mathcal{H}_h x)[n]$ であり, \hat{F} の状態空間表現の行列を $\{A, B, C\}$ とおくと (式 (4) を参照), $\hat{F}\mathcal{H}_h$ の状態空間表現は次式で与えられる (式 (5) を参照).

$$\hat{F}\mathcal{H}_h \begin{cases} \xi[n+1] = A_d \xi[n] + B_d x[n] \\ \hat{\underline{u}}[n](\theta) = C(\theta) \xi[n] + D(\theta) x[n] \end{cases}$$

$$A_d := e^{Ah}, \quad B_d := \int_0^h e^{At} B dt$$

$$C(\theta) := C e^{A\theta}, \quad D(\theta) := \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} B d\tau$$

²これは, $d(t)$ がこの仮定を満たす程度にゆっくり振動する, すなわちあまり高周波成分を含まないということである.

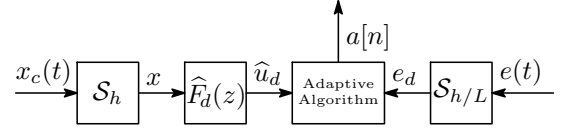


図 4: filtered-xLMS アルゴリズムの実現

これより,

$$\begin{aligned}
& \int_{lh/L}^{(l+1)h/L} \hat{\underline{u}}[n](\theta) d\theta \\
&= \left(\int_{lh/L}^{(l+1)h/L} C(\theta) d\theta \right) \xi[n] + \left(\int_{lh/L}^{(l+1)h/L} D(\theta) d\theta \right) x[n] \\
&= \left(\int_{lh/L}^{(l+1)h/L} C e^{A\theta} d\theta \right) \xi[n] \\
&\quad + \left(\int_{lh/L}^{(l+1)h/L} \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} B d\tau d\theta \right) x[n]
\end{aligned}$$

したがって, $\langle \hat{\underline{u}}[n-m], \underline{e}[n] \rangle_{L^2_{[0,h]}}$ の近似計算は, 次のアルゴリズムによって実現できる.

$$\hat{F}_d \begin{cases} \xi[n+1] = A_d \xi[n] + B_d x[n] \\ \hat{\underline{u}}_d[n] = C_d \xi[n] + D_d x[n] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
C_d &:= \begin{bmatrix} \int_0^{h/L} C e^{A\theta} d\theta \\ \int_{h/L}^{2h/L} C e^{A\theta} d\theta \\ \vdots \\ \int_{h-h/L}^h C e^{A\theta} d\theta \end{bmatrix} \\
D_d &:= \begin{bmatrix} \int_0^{h/L} \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} d\tau d\theta \\ \int_{h/L}^{2h/L} \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} d\tau d\theta \\ \vdots \\ \int_{h-h/L}^h \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} d\tau d\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち, 連続時間の誤差 $e(t)$ をサンプル周期 h/L でサンプリングした信号 $e_d[n]$, および, 参照信号 $x_c(t)$ をサンプル周期 h でサンプリングし, それを (7) で表される離散時間線形システム (これを $\hat{F}_d(z)$ とおく) でフィルタリングした信号 $u_d[n]$ によって filtered-xLMS アルゴリズムは実現できる (図 4 を参照).

5 おわりに

本論文では, サンプル値制御理論におけるリフティングの手法を用い, 2次経路の連続時間特性を考慮した filtered-xLMS アルゴリズムを提案した. 厳密なアルゴリズムは有限区間 $[0, h]$ の積分計算が必要となるが, これを近似計算する手法を, リフティングしたシステムの状態空間表現にもとづき導出した. このアルゴリズムの安定性やロバスト性の解析, また統計的信号処理の枠組みでのリフティングアプローチは今後の課題である.

参考文献

- [1] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, 1995
- [2] S. J. Elliott and P. A. Nelson, “Active Noise Control,” *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 10, Issue 4, pp. 12–35, 1993
- [3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1996
- [4] T. Meurers, S. M. Veres, and S. J. Elliott, “Frequency selective feedback for active noise control,” *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 22, Issue 4, pp. 32–41, 2002
- [5] D. R. Morgan, “An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 454–467, 1980
- [6] Y. Song, Y. Gong, and S. M. Kuo, “A robust hybrid feedback active noise cancellation headset,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 13, pp. 607–617, 2005
- [7] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993
- [8] Y. Yamamoto, “A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 39, pp. 703–712, 1994
- [9] 山本, 永原, “サンプル値制御によるデジタル信号処理,” *システム/制御/情報*, Vol. 45, No. 4, 2001
- [10] D. Yasufuku, Y. Wakasa, and Y. Yamamoto, “Adaptive digital filtering based on a continuous-time performance index,” *計測自動制御学会論文集*, Vol. 39, No. 6, 2003