線形行列不等式による $\Delta\Sigma$ 変調器の最適設計
Optimal Design of $\Delta\Sigma$ Modulators via Linear Matrix Inequalities

永原正章 [*], 山本裕 [**]
Masaaki NAGAHARA, Yutaka YAMAMOTO
京都大学大学院情報学研究科
Graduate School of Informatics, Kyoto University

[*] nagahara@ieee.org, [**] yy@i.kyoto-u.ac.jp

あらまし

本論文では，線形行列不等式による $\Delta\Sigma$ 変調器の新しい設計法を示す．従来の $\Delta\Sigma$ 変調器では，積分器（加算器）$1/(z-1)$ をフィードバックループ内に構成し，量子化雑音の削減をはかっている．いっぽう，本論文では，変調器が安定となるすべてのループフィルタを求め，信号伝達関数 (STF) および雑音伝達関数 (NTF) の周波数特性を整形するために H^∞ 設計を行う．フィルタを FIR と仮定することにより，設計は線形行列不等式で記述され，計算機を用いて用意に最適解を得ることができる．

Abstract

In this paper, we propose a new method for designing $\Delta\Sigma$ modulators via H^∞ optimal control. In $\Delta\Sigma$ modulators, the accumulator $1/(z-1)$ is conventionally used in a feedback loop to attenuate quantization noise. In contrast, we give all stabilizing controllers for the modulator, and propose an H^∞ design to shape the frequency response of the signal transfer function (STF), the system from the input to the output, and the noise transfer function (NTF), the system from the quantization noise to the output. Assuming that the controller is an FIR (finite impulse response) filter, we can reduce the design to linear matrix inequalities and can be solved efficiently.

1 はじめに

$\Delta\Sigma$ 変調器は，高性能の AD および DA 変換器に用いられ，計測やディジタル音声処理，無線通信などに用いられる [5, 7, 6, 8]．オーバーサンプリング処理と $\Delta\Sigma$ 変調器を組み合わせることによって，低ビット（通常は 1 ビット）の量子化にもかかわらず高解像度を持つ変換器を構成できる．

図 1 に $\Delta\Sigma$ 変調器のブロック線図を示す．ここで $H = [H_1, H_2]$ は 2 入力 1 出力の線形システムであり，Q は量子化器である．システム H の役割は，入力 u から出力 y までのシステムの伝達関数（信号伝達関数, STF, Signal Transfer Function）の周波数

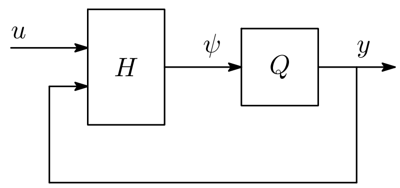

図 1: $\Delta\Sigma$ 変調器

特性をオールパスまたはローパスとし，量子化誤差 $n := Q\psi - \psi$ から出力 y までのシステムの伝達関数（雑音伝達関数, NTF, Noise Transfer Function）の周波数特性をハイパスにすることである．これにより，出力への量子化誤差の影響が高周波側に集まるので，もとのサンプリング周波数（例えばオーディオＣＤでは 44.1KHz）の整数倍（8 倍や 16 倍から数百倍まで）でオーバーサンプリングすることにより，元信号を低周波側へ，量子化誤差を高周波側へ分離することが可能となる．分離後，ローパスフィルタにより元信号を取り出せば元の信号が復元できる．また，無線通信等において変調波を入力信号とするシステムでは，量子化ノイズや他の帯域の変調波（混信ノイズ）を入力信号から分離するために NTF をバンドパス特性にする場合もある [6, 8].

このような $\Delta\Sigma$ 変調器における周波数整形には H^∞ 制御が適している．そこで本論文では，図 1 の $\Delta\Sigma$ 変調器を 2 自由度制御系ととらえ，STF および NTF の周波数整形問題を離散時間 H^∞ 制御問題として定式化する．さらに，制御器 H_1, H_2 をともに FIR フィルタと仮定することにより，設計問題が線形行列不等式に帰着されることを示す.

2　$\Delta\Sigma$ 変調器における周波数整形

ここでは $\Delta\Sigma$ 変調器における線形システム $H = [H_1, H_2]$ の役割について考える．ここで，量子化器 Q は非線形システムであるので，解析を容易にするために線形化モデルを導入する．量子化誤差を

$$n := Q\psi - \psi$$

とおき，この量子化誤差 n が入力 ψ に依存しないと仮定すると，図 2 の付加雑音線形モデルが得られる．このモデルを用いれば，$\Delta\Sigma$ 変調器の入出力関係は次のようになる.

$$y = T_{yu}u + T_{yn}n,$$
$$T_{yu}(z) := \frac{H_1}{1 - H_2(z)}, \quad T_{yn}(z) := \frac{1}{1 - H_2(z)}.$$

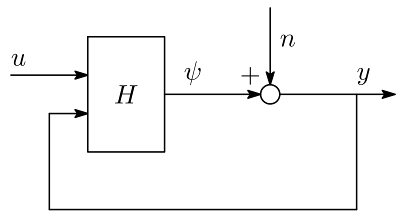

図 2: $\Delta\Sigma$ 変調器の線形化モデル

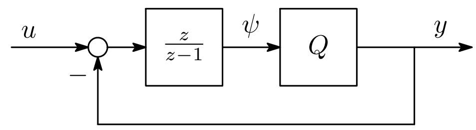

図 3: 1 次 $\Delta\Sigma$ 変調器

ここで，$T_{yu}(z)$ を信号伝達関数 (STF)，$T_{yn}(z)$ を雑音伝達関数 (NTF) と呼ぶ．たとえば 1 次の $\Delta\Sigma$ 変調器（図 3）では，$H_1(z) = z/(z-1)$, $H_2(z) = -1/(z-1)$ であり，

$$y = u + (1 - z^{-1})n$$

となる．このとき，図 4 に示すように $T_{yn}(z) = 1 - z^{-1}$ はハイパス特性を持つため，量子化誤差 n は高周波側に寄ることになる．これからわかるように，一般に，雑音伝達関数 $T_{yn}(z)$ の役割は誤差 n から出力 y までのシステムの周波数応答をハイパスにすることである．また，信号伝達関数 $T_{yu}(z)$ は入力 u から出力 y までのシステムをオールパスまたはローパスにする役割がある.

3　ループフィルタの特徴付け

$\Delta\Sigma$ 変調器が安定であるためには，少なくとも線形化モデルは内部安定でなければならない．そこで本節では，$\Delta\Sigma$ 変調器を 2 自由度制御系ととらえ，フィードバック系を内部安定化する制御器（ループフィルタ）を特徴付ける.

まず，図 2 の 2 自由度フィードバック制御系を考える．図 2 のフィードバック系を内部安定化するす

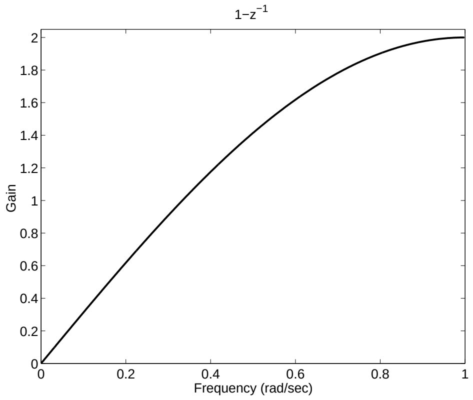

図 4: $T_{yn}(z) = 1 - z^{-1}$ の周波数応答

べてのコントローラ $H(z) = [H_1(z), H_2(z)]$ は，従来から制御理論でよく知られた手法で求まる [2, 3].

Lemma 1. 図 2 のフィードバック系が well-posed であり，かつ内部安定化するすべての $H_1(z)$ および $H_2(z)$ は次で与えられる.

$$H_1(z) = \frac{R_1(z)}{1 + R_2(z)}, \quad H_2(z) = \frac{R_2(z)}{1 + R_2(z)}$$
$$R_1(z) \in \mathcal{S}, \quad R_2(z) \in \mathcal{S}' \tag{1}$$

ここで，$\mathcal{S}$ は安定かつプロパーな有利伝達関数の集合であり，$\mathcal{S}'$ は安定かつ厳密にプロパーな有理伝達関数の集合である.

これらのパラメータ $R_1 \in \mathcal{S}$，$R_2 \in \mathcal{S}'$ を用い，$H_1(z) = R_1(z)/(1 + R_2(z))$，$H_2 = R_2(z)/(1 + R_2(z))$ とすれば，図 2 のシステムの入出力関係は以下で与えられる.

$$y = R_1 u + (1 + R_2) n \tag{2}$$

ここで，$R_1(z) = 1 \in \mathcal{S}, R_2(z) = -z^{-1} \in \mathcal{S}'$ とおけば，従来の 1 次 $\Delta\Sigma$ 変調器（図 3）となる.

さらに，これらの設計パラメータ $R_1 \in \mathcal{S}, R_2 \in \mathcal{S}'$ を陽に用いて $\Delta\Sigma$ 変調器を構成すれば，図 5 のようになる．このブロック線図より，R_1 は入力信号の周波数整形を行う前置フィルタ，R_2 は量子化誤差 $Q\psi - \psi$ に対するフィードバックゲインであると解釈できる.

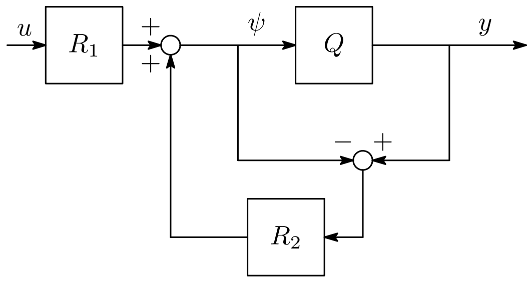

図 5: 設計パラメータ $R_1 \in \mathcal{S}$, $R_2 \in \mathcal{S}'$ を用いた $\Delta\Sigma$ 変調器の構成

4 H^∞ 制御によるループフィルタ設計

4.1 周波数応答の整形

ここでは，Lemma 1 を用いて，図 1 の $\Delta\Sigma$ 変調器の設計を行う．まず，以下のように問題を定式化する.

Problem 1. 安定な重み伝達関数 $W_{STF}(z)$ と $W_{NTF}(z)$ が与えられたとき，次の不等式を満たす $R_1(z) \in \mathcal{S}$ および $R_2(z) \in \mathcal{S}'$ を求めよ.

$$\|R_1 W_{STF}\|_\infty < 1, \quad \|(1 + R_2) W_{NTF}\|_\infty < 1 \tag{3}$$

これは，1 ブロックの離散時間 H^∞ 制御問題であり，最適解は従来法 [2, 3] により容易に解くことができる.

また，ディジタルフィルタの実装には FIR (Finite Impulse Response) フィルタがよく用いられるので，$R_1(z), R_2(z)$ を FIR フィルタとし，

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \sum_{k=0}^{N_1} a_k z^{-k}, \\ R_2(z) &= \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k}, \quad b_0 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

とおく．このとき，$R_1(z) \in \mathcal{S}$，$R_2(z) \in \mathcal{S}'$ が満たされる．不等式 (3) はフィルタ係数 $a_0, a_1, \ldots a_{N_1}$ および $b_1, \ldots, b_{N_2}$ を変数とした線形行列不等式で書くことができる [9].

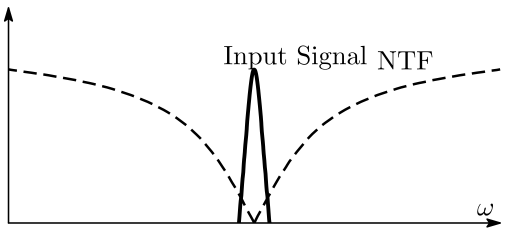

図 6: バンドパス ΔΣ 変調器のノイズ整形

4.2 零点の付加

無線通信等において変調波を入力信号とするシステムでは，量子化ノイズや他の帯域の変調波（混信ノイズ）を入力信号から分離するために，図 6 に示すように，雑音伝達関数 (NTF) をバンドパス特性にする場合もある．このとき，変調波の周波数を NTF の零点とすることで，効率の良い分離が可能となる [6, 8].

この零点の付加は，以下に示すとおり，R_2 を (4) の FIR フィルタとすることにより，設計パラメータ $a_1,\dots,a_{N_1}$ の線形拘束式として表すことができる．すなわち $n_H(z) := z^N - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}$ と定義すると，$T_{yn}(z)$ が M 個の零点を $z = z_0$ に持つための必要十分条件は,

$$\left.\frac{d^k n_H(z)}{dz^k}\right|_{z=z_0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1,$$

で表される．ここで，$\frac{d^0 n_H(z)}{dz^0} := n_H(z)$ と定義する．この線形拘束は，前節の線形行列不等式条件と連立させることができ，零点の付加を含めた設計を容易に行うことができる．

4.3 安定条件

前節までで議論した安定性は，線形化システム（図 2）の安定性である．しかし，実際の ΔΣ 変調器は，図 1 のようにフィードバックループ内に非線形要素である量子化器 Q を含む非線形システムであり，非線形システムとして安定性を議論する必要がある．まず，量子化器 Q に対して，以下の仮定をおく．

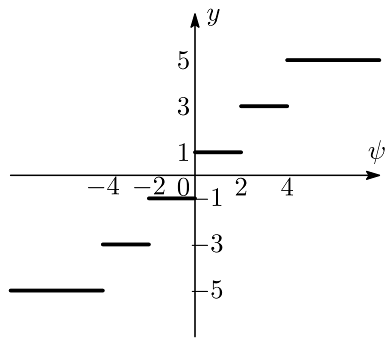

図 7: 一様量子化器 Q

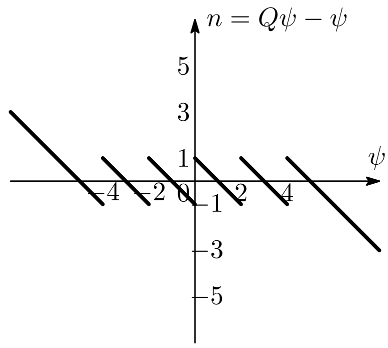

図 8: 量子化誤差 $n = Q\psi - \psi$

Assumption 1. ある $M > 0$ と $\delta > 0$ が存在して，もし $|\psi| \le M$ ならば $|Q\psi - \psi| \le \delta$ が成り立つ.

例えば，Fig. 7 の一様量子化器の場合，$M = 6$, $\delta = 1$ となる（Fig. 8 を参照）． このとき，安定性の十分条件の一つとして，以下の H^∞ ノルムによる安定条件が知られている [4].

$$\|R_2\|_\infty \le \frac{1}{(2N_2+1)\delta}(M - \|u\|_\infty).$$

フィルタ $R_2(z)$ を FIR とすれば，この条件も有界実補題を用いて，線形行列不等式で記述することができる．

また，1 ビットの変調器において，従来よりよく使われる安定条件 (Lee Criterion [1, 7]) $\|1 + R_2\|_\infty < 1.5$ も同様に R_2 を FIR とすることによって，線形行列不等式条件となる．ただし，この条件はシミュ

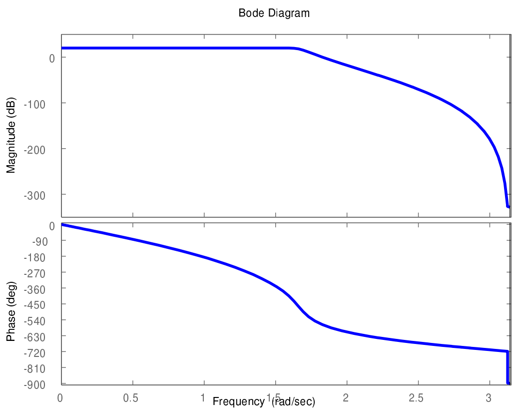

図 9: 重み関数 $W_{\mathrm{NTF}}(z)$ の Bode 線図

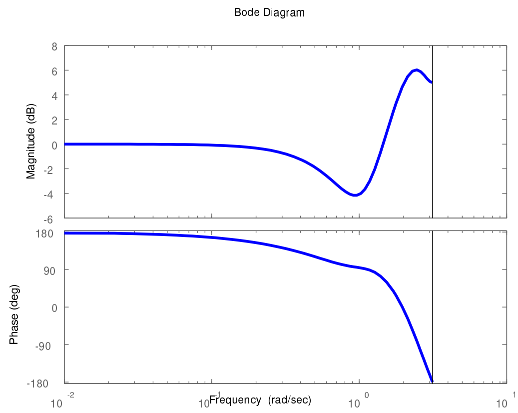

図 10: フィルタ $R_2(z)$ の Bode 線図

レーションによる経験則であり，安定性のための必要条件でも十分条件でもないことに注意する．

5 設計例

ここでは，前節で提案した線形行列不等式および線形拘束式によって $\Delta\Sigma$ 変調器を設計する．まず，$\Delta\Sigma$ 変調器の設計パラメータを以下のように設定する．フィルタ $R_1(z)=1$ とし，$R_2(z)$ は 8 タップの FIR フィルタとする．また，雑音伝達関数 (NTF) $1+R_2(z)$ は $z=1$（すなわち，周波数が 0）に零点を持つものとする．また，安定条件として，$\|R_2\|_\infty < 2$ を採用する．さらに $R_2(z)$ 設計のための重み関数 $W_{\mathrm{NTF}}(z)$ は図 9 に示すようなローパスフィルタとする．得られた最適フィルタ $R_2(z)$ の周波数応答を図 10 に示す．この図より，$R_2(z)$ の H^∞ ノルム（すなわち Bode ゲイン線図における最大値）が 2 (約 6 dB）に制限されていることがわかる．また，図 11 に雑音伝達関数 (NTF) $1+R_2(z)$ の Bode 線図を示す． この図から，NTF が周波数 0 で零点を持っていること，および，ハイパス特性となっていることがわかる．なお，この特性は，重み関数 $W_{\mathrm{NTF}}(z)$ の形に大きく依存する．NTF の形を精密に整形するためには，試行錯誤的に重み関数 $W_{\mathrm{NTF}}(z)$ を決めなければならない．もしあらかじめ NTF の周波数応答の理想的な形が（例えば IIR フィルタの形式で）決まっていれば，その形を最適に近似するように $R_2(z)$ を設計することもできる．すなわち，最適化条件 (3) のかわりに，$G_1(z)$，$G_2(z)$ をそれぞれ $R_1(z)$ (STF), $1+R_2(z)$ (NTF) の理想的な応答として，

$$\|(G_1-R_1)W_1\|_\infty \to \min,$$
$$\|(G_2-(1+R_2))W_2\|_\infty \to \min$$

の H^∞ 最適化を考えればよい．この最適化も線形行列不等式を用いて定式化できる（[9] を参照）．

次に $\omega=\pi/2$ に零点を持つ $\Delta\Sigma$ 変調器の設計例を示す．このとき，零点の条件は

$$1+R_2(e^{j\pi/2})=0, \quad 1+R_2(e^{-j\pi/2})=0$$

となり，複素係数の線形拘束式となるが，共役複素数の性質を使うことにより，実数係数の線形拘束式へ等価的に変換することができる．図 12 に設計したバンドパス $\Delta\Sigma$ 変調器の NTF を示す．この図より，$\omega=2/\pi$ にゼロ点を持ち，バンドパスの特性を持つことがわかる．

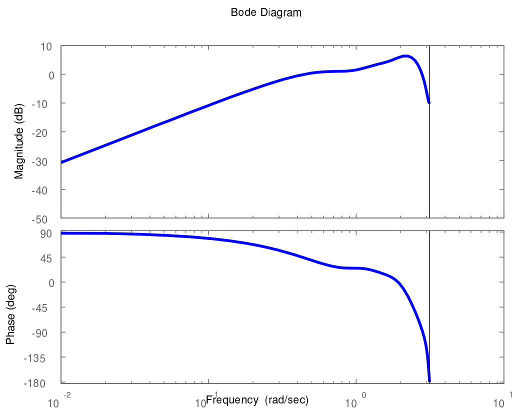

図 11: 雑音伝達関数 (NTF) $1+R_2(z)$ の Bode 線図

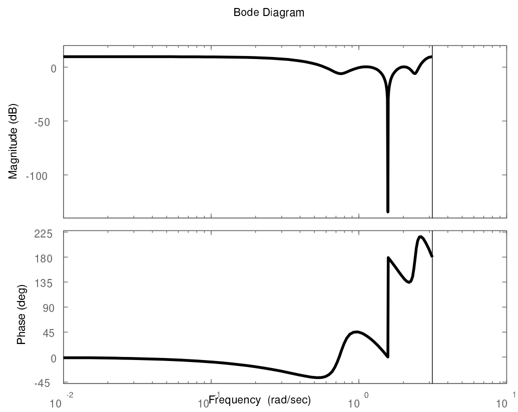

図 12: バンドパス $\Delta\Sigma$ 変調器の NTF

6　むすび

本論文では $\Delta\Sigma$ 変調器におけるループフィルタを H^∞ 制御により設計することを提案した．まず，線形化モデルを用いて，フィードバック系を安定化するフィルタを特徴付けた．また，信号伝達関数 (STF) および雑音伝達関数 (NTF) の周波数整形を H^∞ 最適化により定式化し，ループフィルタが FIR フィルタの場合，その問題が線形行列不等式による最適化に帰着することを示した．また，零点や安定条件も線形拘束式または線形行列不等式として記述することができることを示した．最後に数値例を示し，本手法の有効性を確認した．

参考文献

[1] K. C. H. Chao, S. Nadeem, W. L. Lee and C. G. Sodini, A higher order topology for interpolative modulators for oversampling A/D conversion, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 37, No. 3, 1990.

[2] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell Macmillan International, 1992.

[3] 前田, 杉江, アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報ライブラリー, 朝倉書店

[4] 永原, 山本, H^∞ 制御を用いた $\Delta\Sigma$ 変調器の設計, 第 35 回制御理論シンポジウム予稿集, SICE, pp. 301–304, 2006.

[5] S. R. Norsworthy, R. Schreier and G. C. Temes, *Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press, 1997.

[6] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw Hill, 2000.

[7] R. Schreier and G. C. Temes, *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, Wiley, 2005.

[8] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, 2nd Ed., Prentice Hall, 2001.

[9] Y. Yamamoto, B. D. O. Anderson, M. Nagahara and Y. Koyanagi, Optimizing FIR Approximation for discrete-time IIR filters, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 10, No. 9, 2003.