

# $H^\infty$ 最適化による因果的スプライン補間 Causal Spline Interpolation by $H^\infty$ Optimization

永原正章\*, 和田敏裕\*\*, 山本裕\*\*\*

Masaaki NAGAHARA, Toshihiro WADA, Yutaka YAMAMOTO

京都大学大学院情報学研究科

Graduate School of Informatics, Kyoto University

\* nagahara@ieee.org, \*\* twada@acs.i.kyoto-u.ac.jp, \*\*\* yy@i.kyoto-u.ac.jp

## あらまし

スプライン補間システムには通常、非因果的なフィルタが用いられる。したがってリアルタイム処理が必要な場合、このままでは使いにくい。そこで本論文では、スプライン補間を近似する因果的なシステムを設計する。この設計は、不安定零点を持つシステムの安定な逆システムを求める問題として定式化される。この問題を解くために、本論文では  $H^\infty$  最適化を用いる。まずキュービックスプラインに対する  $H^\infty$  最適化問題の解析解を与える。また高次のスプラインに対しては、数値計算により最適解が容易に求まることを示す。つぎに、 $H^\infty$  最適 FIR (有限インパルス応答) フィルタの設計問題が線形行列不等式として記述できることを示す。最後に設計例を用いて、提案手法の有効性を示す。

## Abstract

Spline interpolation systems generally contain non-causal filters, and hence such systems are difficult to use for real-time processing. Our objective is to design a causal system which approximates spline interpolation. This is formulated as a problem of designing a stable inverse of a system with unstable zeros. For this purpose, we adopt  $H^\infty$  op-

timization. We give a closed form solution to the  $H^\infty$  optimization in the case of the cubic spline. For higher order splines, the optimal filter can be effectively solved by a numerical computation. We also show that the design of optimal FIR (Finite Impulse Response) filter is described by an LMI (Linear Matrix Inequality), which can also be effectively solved numerically. A design example is presented to illustrate the result.

## 1 はじめに

信号補間には、カーブフィッティングや信号復元、画像の解像度変換など様々な応用がある。特に、多項式スプライン補間 [4, 5] は画像処理において広く用いられている。また、指数関数スプライン補間 [6] など新しい補間方法も提案され、理論、応用ともに盛んに研究されている。

多項式スプラインや指数関数スプラインによる補間では、元の信号が区分的な多項式 (指数関数) であると仮定し、スプライン基底による Fourier 係数から補間点の値を求める。しかし、それらの係数は未来のサンプル値を用いなければ求まらず、したがって補間システムは非因果的となる。これは、Shannon のサンプリング定理による信号補間と同様である [3].

画像処理では、非因果性は問題とはならないので、スプライン補間がよく用いられる。しかし、スプライン補間を計測や音声処理などのリアルタイム処理に用いる場合、非因果性は問題となる。

そこで、本論文では、非因果的なスプライン補間を近似する因果的なシステムを設計する。この設計問題は、不安定零点を持つシステムの安定な逆システムを設計する問題として定式化される。この問題を解くために、本論文では、 $H^\infty$  最適化を用いる。これにより、 $H^\infty$  最適な安定逆システムが得られ、因果的なスプライン補間システムが設計できる。さらに、フィルタを FIR と仮定することにより、設計問題は線形行列不等式として記述でき、MATLAB 等の数値計算ソフトウェアを用いて、効率的に最適解を計算することができる。

## 2 スプライン補間

信号  $x \in V^N$  を考える。ここで  $V^N$  は次数  $N$  の多項式スプラインの空間であり、次式で定義される [4].

$$V^N = \left\{ x(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\phi(\cdot - k), c \in \ell^2 \right\}.$$

この定義式において  $\phi(t)$  は次数  $N$  の対称スプライン

$$\phi(t) = \underbrace{(\beta^0 * \dots * \beta^0)}_{N+1}(t), \quad \beta^0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

である。ここで '\*' は畳み込み積をあらわす。

信号  $x(t) \in V^N$  をサンプル周期  $T = 1$  でサンプルした  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  は、

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\phi(n - k) = (c * \phi)(n) \quad (1)$$

と求められる。いっぽう、サンプル周期  $T = 1/L$  ( $L$  は自然数) でサンプルした  $x_L(n) := x(n/L)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  は

$$x_L(n) = (c_L * \phi_L)(n), \quad (2)$$

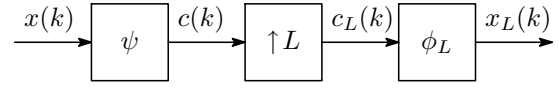


図 1: Spline interpolation

と計算される [4]. ここで  $\phi_L(n) := \phi(n/L)$ ,  $c_L(n) := \{(\uparrow L)c\}(n)$  である。(1) と (2) を用いると、スプライン補間システムは、2つのフィルタ  $\psi$ ,  $\phi_L$  およびアップサンプラ  $\uparrow L$  を用いて、図 1 のように構成される。ここで、フィルタ  $\psi$  は

$$\psi * \phi = I. \quad (3)$$

を満たす  $\phi$  の逆フィルタである。(3) は、遅れなしの完全再構成条件であるが、遅れ  $d \geq 0$  を許した完全再構成条件は、

$$\psi * \phi = z^{-d} \quad (4)$$

となる。

## 3 $H^\infty$ 最適化による因果的スプライン補間

### 3.1 フィルタの分解による非因果的スプライン補間

$N$  次スプライン  $\phi(t)$  は  $[0, N + 1]$  に台を持ち、そのサンプル値  $\phi(n)$  または  $\phi_L(n)$  は FIR フィルタで表現できる。例えば、 $N = 3$  (キュービックスプライン) の場合、

$$\phi(z) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}. \quad (5)$$

である。完全再構成条件 (3) より、フィルタ  $\psi(z)$  を計算すると、

$$\psi(z) = \frac{6z^2}{z^2 + 4z + 1}$$

となるが、 $\psi(z)$  の極の一つが単位円外にあり、 $\psi(z)$  は不安定である。このような状況は、他の  $N$  次ス

プラインでも同様である [5]. これを回避するための一つの方法は,  $\psi(z)$  を因果的なフィルタと反因果的なフィルタに分解する方法である [5]. 例えばキュービックスプラインの場合, まず, (5) のインパルス応答を次のようにシフトし,

$$\phi(z) = \frac{1}{6}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}z^{-1},$$

フィルタ  $\psi(z) = \phi(z)^{-1}$  を次のように分解する.

$$\psi(z) = -\frac{6\alpha}{1-\alpha^2} \left( \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1 \right),$$

ここで,  $\alpha = -2 + \sqrt{3}$  である.  $|\alpha| < 1$  であるので, これは, 安定な非因果的 IIR フィルタである.

### 3.2 $H^\infty$ 最適化による因果的スプライン補間

前節で述べたような非因果的な補間システムは, リアルタイム処理には不向きである. そこで, 本節では, 遅れを許した完全再構成条件 (4) を  $H^\infty$  ノルムの意味で最適に近似する  $\psi(z)$  を求める. 設計問題は以下のように定式化される.

**Problem 1** 安定な伝達関数  $\phi(z)$  と遅れ定数  $d \geq 0$  が与えられたとき, 次の評価関数を最小化する因果的かつ安定なフィルタ  $\psi(z)$  を求めよ.

$$\begin{aligned} J(\psi) &= \|z^{-d} - \psi(z)\phi(z)\|_\infty \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} |e^{-jd\theta} - \psi(e^{j\theta})\phi(e^{j\theta})|. \end{aligned} \quad (6)$$

この問題は, 標準的な  $H^\infty$  最適化問題 (モデルマッチング問題) であり, MATLAB などの数値計算ソフトウェアを用いて効率よく解を得ることができる [1].

### 3.3 $H^\infty$ 最適キュービックスプライン

ここでは, 実装が簡単であるため最もよく使われるキュービックスプライン ( $N = 3$ ) について, その最適解を解析的に与える.

まず, 誤差システムを  $E(z) := z^{-d} - \psi(z)\phi(z)$  とおく. (5) をこれに代入すると,

$$E(z) = z^{-d} - \psi(z) \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}{6z^2},$$

が得られる. ここで,  $\alpha_1 = -2 - \sqrt{3}$ ,  $\alpha_2 = -2 + \sqrt{3}$  である. これより,

$$\psi(z) = \frac{6z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} (z^{-d} - E(z))$$

となる.  $|\alpha_1| > 1$  であるので, フィルタ  $\psi(z)$  は単位円  $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  の外に極を持つ可能性がある. 簡単な計算により, フィルタ  $\psi(z)$  が安定である (すなわち, すべての極が  $\mathcal{D}$  にある) ための必要十分条件は,

$$E(\alpha_1) = \alpha_1^{-d} \quad (7)$$

であることがわかる. したがって, 設計問題は, 補間条件 (7) を満たす  $E(z)$  のなかで,  $H^\infty$  ノルムが最小の安定な  $E(z)$  を見つける問題に帰着する. この問題は, Nevanlinna-Pick 補間問題と呼ばれる [9]. 複素関数の最大値原理より,

$$\|E\|_\infty = \sup_{|z|=1} |E(z)| = \sup_{|z| \geq 1} |E(z)| \geq |E(\alpha_1)| = |\alpha_1|^{-d}$$

であることがわかり, 最小ノルムを持つ補間関数は  $E(z) = \alpha_1^{-d}$ ,  $\|E\|_\infty = |\alpha_1|^{-d}$  であることがわかる. これより, 最適なフィルタ  $\psi(z)$  は,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{6z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} (z^{-d} - \alpha_1^{-d}) \\ &= -\frac{6z^2}{\alpha_1^d z^d (z - \alpha_2)} \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_1^{d-1-k} z^k \end{aligned} \quad (8)$$

と求められる.

**Remark 1** 高次スプラインの場合, 最適なフィルタは Nevanlinna アルゴリズムを用いることによって求められる [9]. しかし, その数式表現は非常に複雑である. このような場合は, 前節で述べたような数値計算による最適解の計算が有効である.

### 3.4 線形行列不等式による FIR フィルタ設計

これまで述べた手法により求まる  $H^\infty$  最適フィルタは一般に IIR フィルタである. ここで, 設計されるフィルタ  $\psi(z)$  は誤差システム  $E(z) = z^{-d} - \psi(z)\phi(z)$  に線形に依存している. この性質を用いると, 次数を固定した  $H^\infty$  最適 FIR フィルタは線形行列不等式による最適化により求めることができる.

設計されるフィルタ  $H^\infty$  を FIR とする. すなわち,

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}$$

とおく. この FIR フィルタの状態空間表現は次式で与えられる.

$$\psi(z) = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline a_N & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ a_0 \end{array} (z)$$

$$=: \left[ \begin{array}{c|c} A_\psi & B_\psi \\ \hline C_\psi(\alpha) & D_\psi(\alpha) \end{array} \right] (z).$$

ここで,  $\alpha := [a_N \dots a_1 a_0]$  である. また, 状態空間表現において, 次式で定義される Doyle の記法 [11] を用いた.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] (z) := C(zI - A)^{-1}B + D.$$

ここで, 設計パラメータ  $\alpha$  は行列  $C_\psi(\alpha)$  および  $D_\psi(\alpha)$  に線形に依存していることに注意する. フィルタ  $\phi(z)$  および  $z^{-d}$  の状態空間表現をそれぞれ

$$\phi(z) =: \left[ \begin{array}{c|c} A_\phi & B_\phi \\ \hline C_\phi & D_\phi \end{array} \right] (z), \quad z^{-d} =: \left[ \begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & 0 \end{array} \right] (z)$$

とおく. このとき, 誤差システム  $E(z) = z^{-d} -$

$\psi(z)\phi(z)$  の状態空間表現は以下で与えられる.

$$E(z) = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_\psi & B_\psi C_\phi & 0 & -B_\psi D_\phi \\ 0 & A_\phi & 0 & -B_\phi \\ 0 & 0 & A_d & B_d \\ \hline C_\psi(\alpha) & D_\psi(\alpha) C_\phi & C_d & -D_\psi(\alpha) D_\phi \end{array} \right] (z)$$

$$=: \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C(\alpha) & D(\alpha) \end{array} \right] (z).$$

これより, 設計パラメータ  $\alpha$  は行列  $C(\alpha)$  および  $D(\alpha)$  に線形に依存することがわかる. 有界実補題を用いることにより, 設計問題は以下のように線形行列不等式で記述される [10].

**Proposition 1** 実数  $\gamma > 0$  が与えられたとき, 不等式  $\|E(z)\|_\infty < \gamma$  が成り立つ必要十分条件は, 正定行列  $P > 0$  が存在して,

$$\left[ \begin{array}{ccc} A^T P A - P & A^T P B & C(\alpha)^T \\ B^T P A & -\gamma I + B^T P B & D(\alpha)^T \\ C(\alpha) & D(\alpha) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (9)$$

が成り立つことである.

**Remark 2** 誤差システム  $E(z)$  の零点は

$$C(\alpha)(z_i I - A)^{-1}B + D(\alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

により設定できる. これは線形行列等式であり, 線形行列不等式 (9) と組み合わせることにより, 零点条件を加味した最適解を容易に得ることもできる.

## 4 SN 比による性能の解析

前節において, 遅れを許した完全再構成条件 (4) を近似する  $H^\infty$  最適なフィルタ  $\phi(z)$  の設計法を示した. この節では, 図 1 に示す補間システムのトータルの性能を SN (Signal-to-Noise) 比を用いて解析する.

**Proposition 2** フィルタ  $\phi(z)$  および  $\psi(z)$  は因果的かつ安定とし,  $x \in \ell^2$  とする.  $\tilde{x}_L$  を近似補間システムの出力信号とする. すなわち,  $\tilde{x}_L := \phi_L(\uparrow L)\psi x$ .

このとき、 $\phi$  と  $L$  にだけ依存する実数  $C > 0$  が存在し、

$$\frac{\|z^{-dL}x_L - \tilde{x}_L\|_2}{\|x\|_2} \leq C\|z^{-d} - \psi(z)\phi(z)\|_\infty \quad (10)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\psi_I$  を完全再構成条件  $\psi_I * \phi = z^{-d}$  を満たす理想フィルタとする。このとき、(1) より、 $\psi_I x = z^{-d}c$  が成り立ち、

$$\begin{aligned} z^{-dL}x_L - \tilde{x}_L &= \phi_L(\uparrow L)\psi_I x - \phi_L(\uparrow L)\psi x \\ &= \phi_L(\uparrow L)z^{-d}c - \phi_L(\uparrow L)\psi\phi c \\ &= \phi_L(\uparrow L)(z^{-d} - \psi\phi)c \end{aligned}$$

となる。 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k=0}^\infty$  は Riesz 基底 [2] であるので、 $\phi$  に依存し、 $c$  および  $x$  には依存しない実数  $K > 0$  が存在して、 $\|c\|_2 \leq K\|x\|_2$  が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} \|z^{-dL}x_L - \tilde{x}_L\|_2 &\leq \|\phi_L(\uparrow L)\|_\infty \|z^{-d} - \psi\phi\|_\infty \|c\|_2 \\ &\leq \|\phi_L(\uparrow L)\|_\infty \|z^{-d} - \psi\phi\|_\infty K\|x\|_2 \\ &= C\|z^{-d} - \psi\phi\|_\infty \|x\|_2, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $C := K\|\phi_L(\uparrow L)\|_\infty$  である。  
□

この命題より、誤差システム  $E(z) = z^{-d} - \phi(z)\psi(z)$  の  $H^\infty$  ノルムが十分小さければ、補間システムの SN 比は大きくなることがわかり、したがって  $H^\infty$  最適化により理想的な（すなわち、非因果的な）補間システムの性能に近い近似システムが得られることがわかる。

## 5 設計例

この節では、前節までで示した  $H^\infty$  最適化による因果的スプライン補間システムの設計例を示す。スプラインの次数は 3 とする（すなわち、キュービックスプラインを考える）。再構成の遅れを  $d = 3$  とし、 $H^\infty$  最適な IIR フィルタを (8) により、また、5 タップの FIR フィルタを線形行列不等式 (9) を用いて設計する。 $N = 3$  の場合の  $H^\infty$  最適 IIR フィ

表 1: Coefficient  $a_k$  of FIR filter  $\psi(z)$

$k$	$H^\infty$ optimal	CLSD [7]	KWA [8]
0	0.1152359	0.0991561	0.06049527
1	-0.4614954	-0.4599156	-0.37739071
2	1.7307475	1.7215190	1.63379087
3	-0.4614951	-0.4599156	-0.37739071
4	0.1152352	0.0991561	0.06049527

ルタ (8) は

$$\psi(z) = \frac{-6z^2 - 6\alpha_1 z - 6\alpha_1^2}{\alpha_1^3 z(z - \alpha_2)}$$

となる。また比較のために、制約付き最小二乗法による設計 (CLSD) [7] および Kaiser 窓関数による打ち切り近似 (KWA) [8] による設計も行う。表 1 に  $H^\infty$  最適 FIR フィルタおよび CLSD と KWA により設計した FIR フィルタの係数を示す。また、図 2 に誤差システム  $E(z) = z^{-3} - \phi(z)\psi(z)$  の周波数応答を示す。この図より、 $H^\infty$  最適 IIR フィルタは全周波数でフラットな特性を持つことがわかる。 $H^\infty$  最適 FIR フィルタは CLSD によるフィルタと似た応答を示している CLSD と KWA はともに、直流入力に対する誤差を 0 にする、すなわち誤差システム  $E(z)$  が  $z = 1$  に零点を持つように設計されていることに注意する。その代償として、高周波側で誤差が大きくなっていることがわかる。表 2 にそれぞれの設計における誤差システム  $E(z)$  の  $H^\infty$  ノルムを示す。一般に  $H^\infty$  設計は、最悪入力に対する応答を最適化するので、入力信号の不確かさに対してロバストであり、これが  $H^\infty$  設計の利点である。いっぽう、CLSD は誤差の平均値を最小化する設計である。どちらが良いかは、応用によって異なる。もし入力信号に不確かさが存在するのなら、 $H^\infty$  設計（最悪ケースの最適化）が適している。

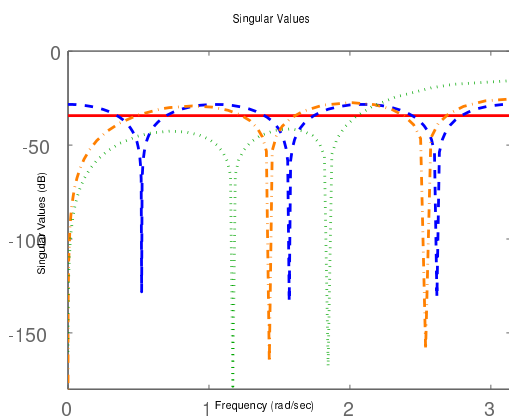


図 2: Magnitude plot of  $E(z)$ :  $H^\infty$  optimal IIR (solid),  $H^\infty$  optimal FIR (dash), CLSD [7] (dash-dots), and KWA [8] (dots).

表 2:  $H^\infty$  norm of  $E(z)$

Method	$\ E\ _\infty$
$H^\infty$ optimal IIR	0.019238
$H^\infty$ optimal FIR	0.038597
CLSD [7]	0.053446
KWA [8]	0.16348

## 6 むすび

本論文では、因果的な多項式スプライン補間システムを  $H^\infty$  最適化により設計する手法を提案した。 $H^\infty$  最適化により、入力信号の不確かさに対してロバストな補間システムが設計できる。また、本論で述べた手法は、指数関数スプライン [6] においても同様に扱うことができる。

## 参考文献

[1] G. Balas, R. Chiang, A. Packard, and M. Safonov, *Robust Control Toolbox Version 3*, The MathWorks, 2005.

[2] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[3] M. Unser, Sampling — 50 years after Shannon, *Proceedings of the IEEE*, **Vol. 88**, **No. 4**, pp. 569–587, 2000.

[4] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, B-Spline signal processing: Part-I — Theory, *IEEE Trans. Signal Processing*, **Vol. 41**, **No. 2**, pp. 821–833, 1993.

[5] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, B-Spline signal processing: Part-II — Efficient design and applications, *IEEE Trans. Signal Processing*, **Vol. 41**, **No. 2**, pp. 834–848, 1993.

[6] M. Unser and T. Blu, Cardinal exponential splines: Part I — Theory and filtering algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, **Vol. 53**, **No. 4**, pp. 1425–1438, 2005.

[7] M. Unser and M. Eden, FIR approximations of inverse filters and perfect reconstruction filter banks, *Signal Processing*, **Vol. 36**, pp. 163–174, 1994.

[8] B. Vrcelj and P. P. Vaidyanathan, Efficient implementation of all-digital interpolation, *IEEE Trans. Image Processing*, **Vol. 10**, **No. 11**, pp. 1639–1646, 2001.

[9] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, 5th ed., American Mathematical Society, 1969.

[10] Y. Yamamoto, B. D. O. Anderson, M. Nagahara, and Y. Koyanagi, Optimizing FIR approximation for discrete-time IIR filters, *IEEE Signal Processing Letters*, **Vol. 10**, **No. 9**, pp. 273–276, 2003.

[11] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1995.