値集合の境界の性質

Properties of Boundary of Value Set

神戸大学工学部　〇 永原正章，太田有三

Masaaki Nagahara and Yuzo Ohta
Faculty of Engineering, Kobe University

Abstract The concept of the value set is very useful in analyzing and designing robust control systems. Therefore, many efforts have been done to compute the value set or an estimate of it. In this paper, we derive properties of boundary of value sets of functions including uncertain parameters.

1 はじめに

パラメータ空間におけるロバスト制御系の解析・設計には，カリトノフの定理やエッジ定理などが知られているが[1]，この定理を適用できる多項式のクラスは限られており，実際のシステムの解析・設計に使えないことがある．このようなシステムにおいて解析や設計を行なう際に非常に有用な手段として値集合を算出することがあげられる．完全分解可能なクラスの多項式に対しては，多角形区間演算を用いて，精度の高い値集合の推定を求めることができるが，これ以外の場合は，現段階では精度の良い値集合の推定を求めることは一般に困難である[2]．本文では，このような場合に対応するために，この値集合の境界が持つ性質を導出する．この性質を用いて，ある機械システムにおける特性多項式の値集合を算出し，有効性を確かめる．

2 閉領域の写像の境界

パラメータ $\mathbf{q}$ を含む特性多項式を

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s,\mathbf{q}) &= \tilde{f}(z_1(s,\mathbf{q}_1), z_2(s,\mathbf{q}_2), \cdots, z_m(s,\mathbf{q}_m)) \\ \mathbf{q}_i &= [q_{i_1}\ q_{i_2}\ \ldots\ q_{i_l}]^T \\ \mathbf{q} &= [\mathbf{q}_1^T\ \mathbf{q}_2^T\ \ldots\ \mathbf{q}_m^T]^T\end{aligned}$$

とおく．ここで，$\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^{i_l}$で$\mathbf{q}_i$と$\mathbf{q}_j$は$i \neq j$のとき共通な成分を持たないとする．また，$z_i(s,\mathbf{q}_i)$は完全分解可能な表現とする．以下では$s$はある複素数の値$s_0$に固定し，定数と考える．このとき，

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \tilde{f}(s_0, \mathbf{q})$$

とおくと，z_iはある領域$\mathcal{D}_i \subset \mathbf{C}$となり，この関数$f$は複素変数$z_i \in \mathcal{D}_i$の多変数複素関数と考えられる．この領域$\mathcal{D}_i$は多角形区間演算で精度の良い推定を求めることが出来る．

多変数複素関数における開写像の定理[3]を用いると次の結果が得られる[4]．

定理 1 複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_m$の多変数複素関数$f(z_1, z_2, \cdots, z_m)$を考える．$z_i \in \mathcal{D}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$とする．各$\mathcal{D}_i$はコンパクトとする．fの定義域を$\Omega = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_m \subset \mathbf{C}^m$とし，$f$の値域を$\mathcal{V} \subset \mathbf{C}$とおく．$f$が$\Omega$上で正則ならば，

$$\partial\mathcal{V} \subset f(\partial\mathcal{D}_1, \partial\mathcal{D}_2, \cdots, \partial\mathcal{D}_m) \tag{1}$$

が成り立つ．すなわち，$\partial\mathcal{V}$は，定義域の境界$\partial\mathcal{D}_i$により決定される．

3 辺の写像

定理1により，定義域の境界だけから値集合が求まることが分かった．つぎにこの境界の写像について考える．

境界の曲線部分を多角形で近似し，その多角形を$\overline{\mathcal{D}}_i$とする．$\overline{\mathcal{D}}_i$の互いに隣あう端点を二つ選んで，その点をp_i^0, p_i^1とおく．辺$\overline{p_i^0 p_i^1}$上の点を$\overline{z_i}$とおくと，$\overline{z_i}$はt_iを実パラメータとして次のようにあらわすことができる．

$$\overline{z}_i(t_i) = p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0)t_i \ , \ t_i \in [0,1]$$

この$\overline{z}_i$をもとの多項式$f(z_1, \ldots, z_m)$に代入し，t_iを動かせば境界の写像が求まる．この写像は

$$g(t_1, \cdots, t_m) = f(\overline{z}_1(t_1), \cdots, \overline{z}_m(t_m))$$

$$g : [0,1] \times \cdots \times [0,1] \triangleq [0,1]^m \to \mathbf{C}$$

と書くことができる．すなわち，超立方体$[0,1]^m$の関数gによる写像を求める問題に帰着する．

この問題はt_iの定義域が複素平面上の閉領域ではないため，定理1を用いることはできない．実際，定義域の内部の点が写像の境界にくることがあり，次の結果が知られている[1]．

補題 1　次のヤコビ行列 $\mathbf{J}(\mathbf{t}), \mathbf{t} = [t_1 \ \cdots \ t_m]^T$の階数が2未満となるような点$\mathbf{t} = \mathbf{t}^0 \in (0,1)^m$は写像の境界にくる場合がある．

$$\mathbf{J}(\mathbf{t}) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_m} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_m} \end{bmatrix}$$

この定理1のヤコビ行列の階数が2未満となるような点$\mathbf{t}^0$の集合を$\mathbf{T}^0 \subset (0,1)^m$とすると次の系が成り立つ[4)]．

系 1　$\partial g([0,1]^m) \subset g(\partial[0,1]) \cup g(\mathbf{T}^0)$

$\mathrm{rank}\,\mathbf{J}(\mathbf{t}) < 2$ の必要十分条件は任意の i, jについて

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_i} & \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_j} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_i} & \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_j} \end{vmatrix} = 0$$

であるが，$\mathbf{J}(\mathbf{t})$ のある列ベクトルが $\mathbf{0}$ でなければ，つぎの定理が成り立つ[4)]．

定理 2　あるi $(1 \leq i \leq m)$について第i列目のベクトルが $\mathbf{0}$ でなければ，$\mathrm{rank}\,\mathbf{J}(t_1, \cdots, t_m) < 2$ の条件は次の条件と等価である．

$$J_j^i(t_1, \cdots, t_m) \triangleq \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_i} & \dfrac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial t_j} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_i} & \dfrac{\partial \mathrm{Im}(g)}{\partial t_j} \end{vmatrix} = 0$$
$$(j = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m)$$

4　例題

図1のようなシステムの特性方程式の値集合を求めてみる．fを入力，$x_b = y$を出力として特性多項式$f(s, \mathbf{q})$を求めると，

$$\begin{aligned} f(s, \mathbf{q}) &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \\ z_1(s, \mathbf{q}_1) &= M_1 s^2 + B_1 s + K_1 \\ z_2(s, \mathbf{q}_2) &= M_2 s^2 + B_3 s + K_3 \\ z_3(s, \mathbf{q}_3) &= B_2 s + K_2, \ \ \mathbf{q}_3 = [B_2 \, K_2]^T \end{aligned}$$

ここで$\mathbf{q}_1 = [M_1 \, B_1 \, K_1]^T, \mathbf{q}_2 = [M_2 \, B_3 \, K_3]^T, \mathbf{q}_3 = [B_2 \, K_2]^T$であり，$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \, \mathbf{q}_2^T \, \mathbf{q}_3^T]^T$である．パラメータの区間，および$s$を適当に決め値集合を求める．$z_1, z_2, z_3$の領域は長方形となり，この境界上の点をいくつかとって写像を求めたのが図2である．曲線部分が $\mathrm{rank}\,\mathbf{J} < 2$ の写像である．

図 1: 機械システム

図 2: 値集合

5　おわりに

本文ではパラメータを含む多項式を多変数複素関数であらわすと，その定義域の境界だけから値域すなわち値集合の境界が求まることを示した．例題では境界上の点を何点か選んで写像させたが，この方法では境界上の点の数が多くなれば計算量が膨大になる．また値集合の境界$\partial \mathcal{V}$そのものを求めることは(1)式の関係だけからは，難しいと考えられる．したがって，一般的な多項式に対して値集合の境界を求めるにはさらに考察が必要である．

参考文献

1) J.Ackermann, et al. : Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters, Springer-Verlag, Berlin (1993)

2) 太田有三 : 多角形区間演算を用いたロバスト制御系の解析と設計, 計測と制御, Vol.35, No.10 (1996)

3) 樋口禎一, 吉永悦男, 渡辺公夫 : 多変数複素解析入門, 森北出版 (1980)

4) 永原正章 : 値集合の算出に関する研究, 神戸大学工学部システム工学科卒業論文 (1998)