サンプル値制御理論による
ディジタルフィルタ設計

Digital Filter Design via Sampled-Data Control Theory

京都大学情報学研究科　○加嶋　健司，永原　正章，山本　裕

Kenji Kashima, Masaaki Nagahara, Yutaka Yamamoto
Graduate School of Infomatics, Kyoto University

Abstract　A design method for digital filters is developed baced on sampled-data H^∞ control theory. The key of this method is to find a discrete-time filter which minimizes the H^∞ norm of the error system between the filter and time-delay taking intersample bahavior into account. Some examples are presented to illustrate the results, particularly in comparison with those from the conventional design methods.

1　はじめに

ディジタルフィルタ設計には，窓関数法や等リップルフィルタなど理想特性を近似する手法や双一次変換法のようにアナログ特性を近似する手法など様々な設計法がある [1)]．そして設計の際には，これらの諸手法の中から，その信号処理系に応じて経験的に設計手法が選ばれることが多い．また，これらの設計法は，元の連続時間信号がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定した，離散時間領域での議論である．しかし，信号を完全に帯域制限することは現実には不可能であり，連続時間特性を考慮したディジタルフィルタ設計が望まれる。

この問題に関して文献 2) では，ディジタル信号処理における信号復元問題にサンプル値 H^∞ 制御理論を導入し，連続時間特性を最適化するディジタルフィルタ設計が提案されている。これにより，ナイキスト周波数以上の周波数成分をも考慮した (準) 最適な信号復元が可能となる。

本研究では，この手法に基づき，アップサンプラを含めたディジタルフィルタ設計をサンプル値 H^∞ 制御により行う．この信号処理系はマルチレート系であり，サンプル周期よりも速い周期でディジタル信号処理を行うことで，より高精度の信号復元が可能となる．また，本手法ではマルチレートのディジタルフィルタによるアナログフィルタの (準) 最適な離散化が可能であり，従来の双一次変換法に比べ，より精密な信号処理系が得られる．

2　問題設定

図 1 をもとに問題の定式化を行う．まず，全帯域に一様な分布をもつと仮定するアナログ信号 w_c をアンチエイリアスフィルタ $F(s)$ により近似的に帯域制限する．この信号をアナログ元信号とみなすが，完全帯域制限されることはあり得ないので，常にわずかながら高周波成分を持つ．

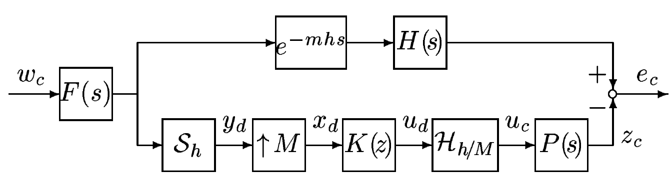

図 1: 誤差系

下の経路では，この元信号を周期 h でサンプリングし，離散時間信号 y_d を得る．次に y_d をアップサンプラ $\uparrow M$ によりサンプル周期 h/M の離散時間信号 x_d に変換する．ここで $\uparrow M$ は次式で定義される．

$$\uparrow M : y_d \mapsto x_d : x_d[k] = \begin{cases} y_d[l], & k = Ml,\ l = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

アップサンプルによるイメージング成分を含む信号 x_d はディジタルフィルタ $K(z)$ によって処理され，周期 h/M で動作する 0 次ホールド $\mathcal{H}_{h/M}$ によって連続時間信号 u_c に変換される．さらに u_c をアナログフィルタ $P(s)$ によって平滑化し z_c を得る．

一方，上の経路では，通常，フィルタや信号復元には遅延が許容されることを考慮し，元信号を時間 mh （m は整数）だけ遅らせる．また図のように連続時間フィルタ $H(s)$ を配置することで，元信号が $H(s)$ を経て出力される．したがって $H(s) = 1$ ならば信号復元問題，それ以外の場合は $H(s)$ の離散近似問題の定式化となる．このように e_c は，復元誤差ないし近似誤差を表している．

こうして得られた誤差系には，連続時間と離散時間が混在するため扱いが困難である．しかしこうしたハイブリッドシステムにも周波数応答が定義されており，その最大値である H^∞ ノルムは L^2 誘導ノルムと等しくなることも知られている．そこで，全帯域における最適性を保証するため，次のように問題を設定する．

問題 1　安定な連続時間フィルタ $F(s)$ と $P(s)$ が与えられたとする．連続時間信号 w_c から e_c へのシステムを T_{ew} とおく．このとき，与えられた $\gamma > 0$ に対し

$$\|T_{ew}\|_\infty := \sup_{w_c \in L^2[0,\infty)} \frac{\|T_{ew} w_c\|_2}{\|w_c\|_2} < \gamma$$

を満たすディジタルフィルタ $K(z)$ を求めよ．

これに基づいて得られる準最適なフィルタ $K(z)$ を求めるフィルタとする．

3　設計例

実際の計算において，問題 1 で定義したノルムは無限次元作用素の作用素ノルムであるため，求めることは困難である．そこで本研究ではこれを求める際，入出力を周期 $h/N (N = Ml, l$ は整数) で離散近似する高速サンプリング手法 [3] を用いる．これにより問題 1 は離散時間 H^∞ 制御問題へと軽減できる．

パラメータ $H(s) = 1$，$M = h = 2$，$L = 2h$，$N = 16$，

$$F(s) = \frac{1}{(7.01873s + 1)(0.701873s + 1)}, \quad P(s) = 1$$

のもとで設計を行う．周波数応答を図 2 に，矩形波応答を図 3 に示す．ただし，実線が提案法，点線が従来法（32 次の Johnston フィルタ）である．

図 2 では，提案法により設計されたフィルタは従来法とは全く異なり非常に緩やかな減衰特性を示している．これは一見するとフィルタの役目を果たしていないように見えるが，原信号の帯域分布特性を基に，ナイキスト周波数以上の帯域まで再現したものと解釈できる．

実際図 3 において，従来法では，急峻な帯域遮断特性により，時間領域における Gibbs 現象に相当する非常に大きなリンギングが生じている．これに対し，提案法のリンギングは小さく抑えられ，よりよい復元特性を示している．また実験においても素直な聴感特性が得られた．

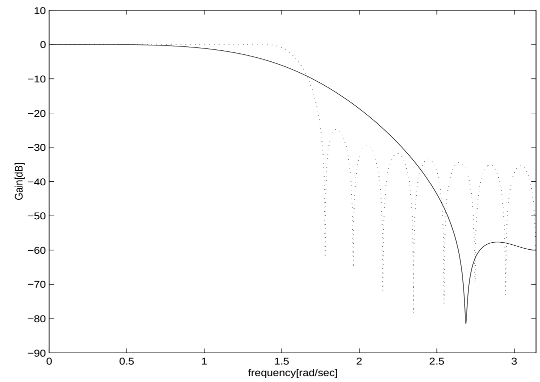

図 2: 周波数応答

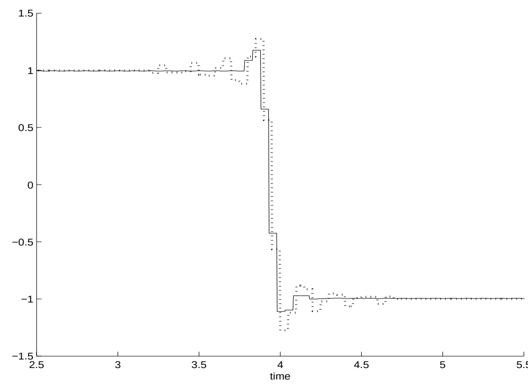

図 3: 矩形波応答

4　おわりに

本論文では信号復元問題および離散近似問題を遅延要素，アップサンプラを含めてサンプル値 H^∞ 制御問題として定式化することで，サンプル点間の信号を含めたアナログ領域での最適性を考慮に入れたディジタルフィルタ設計が可能であることを示した．

参考文献

1) G. Zelniker and F. J. Taylor, *Advanced Digital Signal Processing*, Dekker, 1994.

2) P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto, "Delayed signal reconstruction using sampled-data control," *Proc. 35th Conf. on Decision and Control*, pp. 1259–1263, 1996.

3) J. P. Keller and B. D. O. Anderson, "A new approach to the discretization of continuous-time controllers", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 37, No2, pp. 214–223, 1992.