

あるクラスの無限次元アナログ特性に対するサンプル値 H^∞ 最適フィルタの設計法

Design of Sampled-Data H^∞ Optimal Filters for a Class of Infinite-Dimensional Analog Characteristics

永原 正章 (京都大学), 銭谷 謙吾 (京都大学), 山本 裕 (京都大学)

Masaaki Nagahara (Kyoto University), Kengo Zenitani (Kyoto University),

Yutaka Yamamoto (Kyoto University)

Abstract Sampled-data H^∞ optimal filters have been designed under the assumption that the original signals are generated by L^2 signals filtered by a finite-dimensional linear time-invariant system. In application to image processing, we should treat signals which cannot be modeled by such finite-dimensional analog characteristics. In this study, we propose a new design method for a class of infinite-dimensional analog characteristics.

1 はじめに

これまでのサンプル値制御理論にもとづくデジタルフィルタの H^∞ 最適設計においては, 原信号のアナログ特性を有限次元線形時不変システムにより仮定している [3]. しかし, 画像処理などでは, 有限次元では表現しきれない特性があらわれる. 具体的には, ローパスフィルタの減衰特性が -20dB/dec の自然数倍ではなく, 例えば -30dB/dec のような減衰特性を仮定する必要がある. そこで, 本研究では, そのような減衰特性を持つ無限次元の線形システムに対するサンプル値 H^∞ 最適フィルタの設計法を示す.

まず, 元信号のアナログ特性が有界台のインパルス応答を持つシステムであるとして, FSFH (fast sampling/fast hold) の手法 [2, 3] により離散化する. 離散化されたシステムは FIR (Finite Impulse Response) フィルタとなる. これにより近似的に有限次元問題に帰着され, 最適フィルタを求めることができる. 次に安定な非有理伝達関数に対して離散化を行う. この伝達関数のインパルス応答の台は一般に有界ではないが, インパルス応答が十分小さくなるところで打ち切ることにより有界台インパルス応答の問題に帰着でき, 上記の方法により最適フィルタが計算できる.

2 有界台インパルス応答を持つ無限次元システムの離散化

図 1 に本稿で考察するサンプル値 H^∞ 最適フィルタ設計のための誤差系のブロック線図を示す. ここで, F は元のアナログ信号の特性をモデル化したものであり, 従来法 [3] では有限次元線形時不変システムで与えられていたが, 本稿ではこの F を, コンパクト台のインパルス応答 $f(t)$ を持つ線形システムとする. このとき, ある $\tau > 0$ が存在して, $\text{supp}(f) \subset [0, \tau]$ が成り立つ. F_a は安定で厳密にプロパーな有限次元線形システムとし,

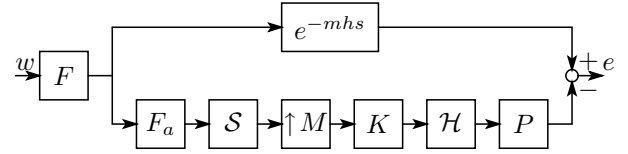


図 1: フィルタ設計のための誤差系. F はコンパクト台のインパルス応答を持つ線形時不変システムである.

S はサンプリング周期 h の理想サンブラとする. $\uparrow M$ は M 倍のアップサンブラ, K はデジタルフィルタ, \mathcal{H} はサンプリング周期 h/M のゼロ次ホールド, P は安定でプロパーな有限次元線形システムとする.

有界台のインパルス応答 $f(t)$ を持つシステムを FSFH (fast sampling/fast hold) [2, 3] により離散化すると, その離散時間システム $F_d(z)$ は次の FIR (Finite Impulse Response) フィルタで表される.

$$F_d(z) = \sum_{n=0}^L f(nh/N)z^{-n}. \quad (1)$$

ただし, h はサンプリング周期, N は FSFH の分割数であり, L は $\tau \leq Lh/N$ を満たす最小の自然数とする. これより, 図 1 の誤差系において, $F = 1$ とおいてサンプル値系を FSFH により離散化し, それに上で求めた FIR フィルタ $W_d(z)$ を結合することにより, 近似離散時間系が得られ, H^∞ 最適フィルタ $K(z)$ が計算できる.

3 安定な非有理伝達関数の離散化

アナログ特性 F として次の伝達関数を持つシステムを考える.

$$F(s) = \frac{1}{(Ts+1)^\alpha}, \quad T > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

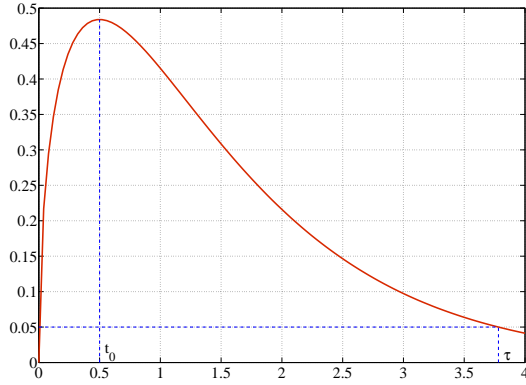


図 2: インパルス応答 ($T = 1, \alpha = 1.5$) .

この伝達関数の周波数応答ゲインは

$$20 \log_{10} |F(j\omega)| = -20\alpha \log_{10} \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

となるので, $\omega \gg 1/T$ の周波数範囲でのゲイン曲線の傾きは -20α dB/dec となる. パラメータ α を例えば $\alpha = 1.5$ とすると, -30 dB/dec の傾きを持つゲイン曲線が得られ, アナログ特性の高周波での減衰率を詳細にモデル化できる.

パラメータ α が整数でなければ $F(s)$ は無限次元システムとなる. また $T > 0$ であれば $F(s)$ は右半平面で有界な解析関数となり, H^∞ に属することがわかる. 伝達関数 $F(s)$ のインパルス応答は次で与えられる [4].

$$f(t) = \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{T}} \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha-1}. \quad (2)$$

ただし, $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数であり, 次式で定義される.

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

このインパルス応答の台は有界ではない. 前節での方法をこのシステムに用いるために, $f(t)$ が十分 0 に近くなったところ, すなわち十分小さな $\epsilon > 0$ を与えて, $f(t) \leq \epsilon$ となるところで打ち切ることを考える. まず, $f(t)$ の微分 $f'(t)$ は

$$f'(t) = \frac{1}{T^2\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{T}} \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha-2} \left(\frac{t}{T} - \alpha + 1\right)$$

となるので, $f(t)$ は $t = t_0 := T(\alpha - 1)$ で最大値をとり, $t > t_0$ で $f' < 0$, すなわち単調減少であることがわかる. 図 2 に $T = 1, \alpha = 1.5$ のときの $f(t)$ のグラフを示す. インパルス応答 $f(t)$ が $t = t_0 = T(\alpha - 1) = 0.5$ で最大値をとることがわかる. したがって, $f(\tau) = \epsilon$ を満

たす $\tau > t_0$ をとれば, 任意の $t \geq \tau$ に対して, $f(t) \leq \epsilon$ となる. なお, $\epsilon > 0$ が与えられたときの τ の値は, 次で計算できる.

命題 1 パラメータ $\epsilon > 0$ が与えられたとき, $f(\tau) = \epsilon$ を満たす $\tau > t_0 = T(\alpha - 1)$ は次式で与えられる.

$$\tau = -t_0 W_{-1} \left[-\frac{T}{t_0} (\epsilon T \Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha-1}} \right]. \quad (3)$$

ただし, W_{-1} は Lambert の W 関数 [1] である.

証明 方程式 $f(\tau) = \epsilon$ は等価的に以下の方程式に変形できる.

$$-\frac{\tau}{T(\alpha-1)} e^{-\frac{\tau}{T(\alpha-1)}} = -\frac{1}{\alpha-1} (\epsilon T \Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (4)$$

この方程式の解は 2 つあるが, $\tau > t_0$ の解は, Lambert の 2 つの W 関数のうち値域が $(-\infty, -1)$ の関数 W_{-1} を用いれば求まる. すなわち, (4) は W_{-1} を用いて

$$-\frac{\tau}{T(\alpha-1)} = W_{-1} \left[-\frac{1}{\alpha-1} (\epsilon T \Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha-1}} \right]$$

と変形でき, この両辺に $-t_0 = -T(\alpha - 1)$ を掛ければ, (3) を得る.

図 2 のインパルス応答に対して, $\epsilon = 0.05$ として, (3) の公式で τ の値を計算すると $\tau \approx 3.782$ となる.

時刻 τ 以降の $f(t)$ を 0 とおくことで, $[0, \tau]$ に台を持つインパルス応答が得られる. また, $\alpha \geq 1$ であるので, $f(t)$ は $[0, \infty)$ で有界である. 実際, 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して, $f(t) \leq \max_{t \in [0, \infty)} f(t) = f(t_0)$ となる. したがって, (1) の FIR フィルタ $F_d(z)$ の係数は有界となり, 前節の FSFH 手法が適用できる. なお, もし $\alpha > 1$ であれば必ず $f(0) = 0$ となるので, $F_d(z)$ は厳密にプロパーとなる.

参考文献

- [1] F. Chapeau-Blondeau and A. Monir, Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent $1/2$, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 50, No. 9, pp. 2160–2165, 2002.
- [2] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, 1995.
- [3] 山本, 藤岡, 原, サンプル値制御理論 VI — デジタル信号処理への応用, システム/制御/情報, vol. 44, no. 6, pp. 336–343, 2000.
- [4] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover, 1965.