サポートベクター回帰による制御理論的スプラインのロバスト化

Robust Design of Control Theoretic Splines via Support Vector Regression

○ 永原 正章 (京都大学)

Masaaki Nagahahara (Kyoto University)

Abstract In this article, we propose a robustification method for control theoretic splines. Control theoretic splines are either interpolating or smoothing splines, depending on the constraints and cost function, with a constraint written as a system of linear differential equations. While conventional control theoretic splines are effective for Gaussian noise, they are very sensitive to outliers. To achieve robustness against them, we propose to use support vector regression which can reduce outliers. A numerical example shows the effectiveness of our method.

1 はじめに

与えられた有限個のデータに連続時間線形システムの出力をフィッティングさせる最適制御入力は制御理論的スプラインによって記述できることが知られている [2, 3]. これは，データに対する経験的リスクを 2 ノルムで測り，かつパラメータに対する 2 ノルムの正則化項を加えて最適化を行うもので，データに加わる変動をガウス分布と仮定したものと解釈できる．しかし，現実のデータには，ガウス分布の仮定では非常に小さい確率でしか起こりえない外れ値が混入することもあり，そのような場合，回帰誤差が非常に大きくなる可能性がある．そこで，本研究ではサポートベクター回帰 (SVR, Support Vector Regression) の手法 [1] を導入し，データの外れ値に対してロバストな制御理論的スプラインの設計を提案する．この手法では，経験的リスクを ε 不感応関数によって測ることによって，ガウス分布よりも裾の広い確率分布に従う雑音を考慮する．サポートベクター回帰の標準的な手法を用いて，最適制御入力の設計が 2 次計画問題として記述できることを示し，数値例によって外れ値に対してロバストなフィッティングが可能であることを示す.

2 問題設定

次の線形システム P を考える:

$$P : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \\ y(t) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(t), & t \in [0, \infty). \end{cases} \tag{1}$$

ここで $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ とし，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ とする．また，$(A, \boldsymbol{b})$ は可制御，$(\boldsymbol{c}^\top, A)$ は可観測とする．このシステムの出力信号 y に対して，データ点 $\mathcal{D} := \{(t_1, y_1), (t_2, y_1), \ldots (t_N, y_N)\}$ を与える．各 t_i は時刻を表すデータで $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N =: T$ とする．その各時刻において，システムの出力 $y(t_i)$ が y_i に近くなるように，すなわち $y(t_i) \approx y_i$ となるように制御入力 u を設計したい．この設計問題に対して，次の 2 ノルム評価関数を考える:

$$J_2(u) := \lambda_2 \int_0^T u(t)^2 \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^N w_i (y(t_i) - y_i)^2. \tag{2}$$

ここで，$w_i > 0$ は各データ点へのフィッティングに対する重みである．この評価関数 $J_2(u)$ を最小化する最適制御入力は，次式で表されることが知られており，制御理論的スプラインと呼ばれる [2, 3]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \theta_i g_i(t). \tag{3}$$

関数 $g_i(t)$ は

$$g_i(t) := \begin{cases} \boldsymbol{c}^\top e^{A(t_i - t)}\boldsymbol{b}, & \text{if } t_i > t, \\ 0, & \text{if } t_i \leq t \end{cases} \tag{4}$$

で定義され，係数 $\boldsymbol{\theta} := [\theta_1, \ldots, \theta_N]^\top$ は $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_2 W^{-1} + G)^{-1}\boldsymbol{y}$ で与えられる．ここで，$\boldsymbol{y} := [y_1, \ldots, y_N]^\top$ であり，また行列 G は $G_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, N$ で定義される.

評価関数 (2) はデータに対する経験的リスク（第 2 項）を ℓ^2 ノルムで測っている．これは，データに加わる変動をガウス確率変数と仮定したときの最尤推定に対応する [1]．しかし，ガウス分布の仮定下ではほとんど起こりえない大振幅の変動が混入した場合，上記の方法ではこの変動の影響で回帰誤差が非常に大きくなる.

これに対応するため，データに加わる変動をガウス分布ではなく次の ϵ 不感応確率分布 [1] と呼ばれる分布と仮定する.

$$p(\xi) = \frac{1}{2(1+\epsilon)} \exp(-|\xi|_\epsilon).$$

ここで，$\epsilon > 0$ はパラメータであり，$|\xi|_\epsilon := \max(|\xi| - \epsilon, 0)$ と定義する．この分布はガウス分布よりも裾が広

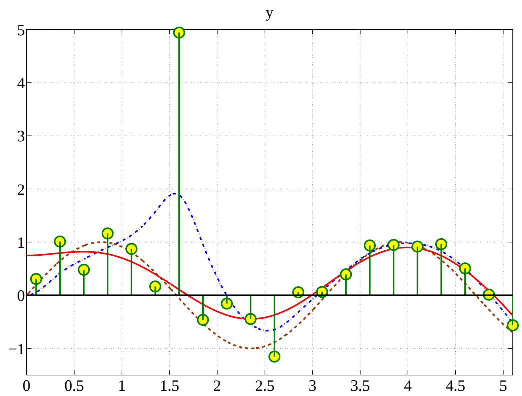

図 1: Original curve $y(t) = \sin 2t$ (dash), sampled data $\mathcal{D}$ (circles), reconstructed curve via SVR (solid) and via ℓ^2 optimization (dash-dots).

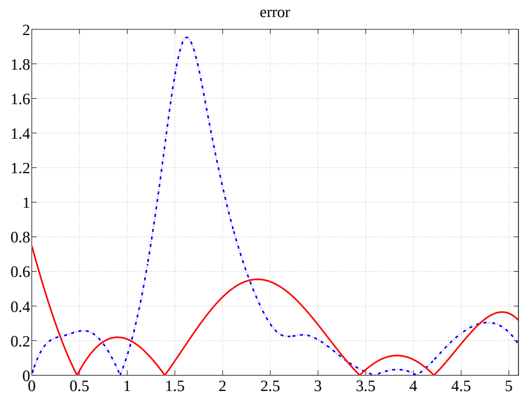

図 2: Reconstruction error: via SVR (solid) and via ℓ^2 optimization (dash-dots).

く，外れ値に強い回帰が可能なことが知られている．この分布のもとでの経験リスクを考慮して，次の評価関数を最小化することを考える．

$$J := \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + C\sum_{i=1}^{N}\left|\boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{\varphi}_i - y_i\right|_\epsilon \tag{5}$$

ただし $C > 0$ は正則化項と経験リスクのバランスをとるパラメータであり，また $\boldsymbol{\varphi}_i := [G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{iN}]^\top$ である．

この最適化問題は，サポートベクター回帰の手法 [1] を用いて解くことができる．すなわち，問題は次の最適化問題に帰着する．

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + C\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i + \hat{\xi}_i\right)\\ &\text{subject to}\\ &\qquad y_i \le \boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{\varphi}_i + \epsilon + \xi_i,\ y_i \ge \boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{\varphi}_i - \epsilon - \hat{\xi}_i,\\ &\qquad \xi_i \ge 0, \quad \hat{\xi}_i \ge 0.\end{aligned}$$

この問題は凸計画問題であり，最適解を効率よく求めることができる．

3　数値例

対象となる線形システム P の実現を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

とする．すなわち，$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$ である．データ $\mathcal{D}$ のサンプル時刻を $t_i = 0.1 + (i-1) \times 0.25$, $i = 1, 2, \dots, 21\}$ とし，データ y_i を正弦波 $y_i = \sin 2t_i$ に外れ値を含む変動が加わったものとする（図 1 を参照）．(2) の評価関数 J_2 を最小化する入力および (5) を最小化する入力を計算し，回帰を行った結果を図 1 に示す．この結果からわかるように，(2) の評価関数 J_2 を最小化する入力，すなわち ℓ^2 最適化による回帰では，データの外れ値に対して敏感に反応してしまい，外れ値付近で回帰がうまくいっていないことがわかる．一方，提案法のサポートベクター回帰では，ϵ 不感応関数を用いたことにより，外れ値に対してロバストな回帰が達成されていることがわかる．図 2 に復元誤差を示す．この図より，従来の ℓ^2 最適化法では，外れ値に対してロバストではないことがわかり，また提案法は外れ値に対して強い復元性能を得ていることがわかる．

4　おわりに

本稿では，制御理論的スプラインに対して，データに外れ値が含まれる場合でもロバストに復元が可能な手法を提案した．外れ値に対応するために ϵ 不感応関数を導入し，サポートベクター回帰問題として定式化することにより，問題は凸計画問題となり，効率的に解が得られる．また，数値例により，提案手法の有効性を示した．

参考文献

[1] B. Schölkopf and A. J. Smola, *Learning with Kernels*, MIT Press, 2002.

[2] S. Sun, M. B. Egerstedt, and C. F. Martin, Control theoretic smoothing splines, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vo. 45, No. 12, pp. 2271–2279, 2000.

[3] M. Egerstedt and C. Martin, *Control Theoretic Splines*, Princeton University Press, 2010.