

ℓ^1/ℓ^2 最適化によるスパースなパケット化予測制御

Sparingly packetized predictive control based on ℓ^1/ℓ^2 optimization

永原 正章 (京都大学), ダニエル E. ケヴェド (ニューキャッスル大学)

Masaaki Nagahara (Kyoto University), Daniel E. Quevedo (The University of Newcastle)

Abstract We investigate a networked control architecture for LTI plant models with a scalar input. Communication from controller to actuator is over an unreliable network which introduces packet dropouts. To achieve robustness against dropouts, we adopt a packetized predictive control paradigm wherein each control packet transmitted contains tentative future plant input values. The novelty of our approach is that we seek that the control packets transmitted be sparse. For that purpose, we propose to design the control packets via on-line minimization of a suitable ℓ^1/ℓ^2 cost function. A numerical example illustrates that sparsity reduces bit-rates, thereby making our proposal suited to control over unreliable and bit-rate limited networks.

1 はじめに

ネットワーク化制御システムとは、帯域制限されたネットワーク（例えば無線通信ネットワークなど）を介して制御対象を制御するシステムのことである。現実のネットワークには遅延やパケットロスなどがあり、安定性や制御性能への影響を考慮する必要がある。このうちパケットロスに対しては、パケット化予測制御が提案され、有効性が示されている [3]。パケット化予測制御では、モデル予測制御 [1] において計算される未来の制御入力信号系列をパケット化して送信する。送信が成功すれば、それを受信側のバッファで保存する。保存された制御入力系列は、以降、パケットロスが生じたときに使用される。この方式により、パケットロスに対してロバストなネットワーク制御系が得られる。

送信する制御入力系列は長ければ長いほど、より多くのパケットロスに対応できるが、ネットワークは帯域制限されており送信できるビットレートは限られるので、あまり長くはできない。そこで本稿では、圧縮センシング等の研究で用いられているスパース表現のテクニック [4] を導入し、送信パケットのスパース表現を試みる。パケットのスパース表現は、 ℓ^1/ℓ^2 最適化により効率的に実現が可能であることを示す。また数値例により、提案手法の有効性を示す。

2 パケット化予測制御

以下の制御対象を考える。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

ここで $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ とし、 (A, B) は可到達と仮定する。この制御対象に対して、パケットロスが発生する信頼性の低いネットワークを介して制御を行うことを考える。

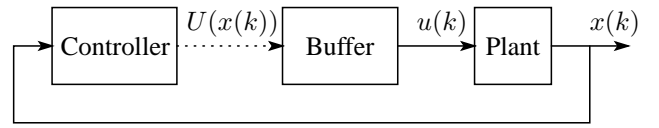


図 1: Networked Control System with PPC. The dotted line indicates an erasure channel.

パケット化予測制御 [3] とは、時刻 k での (1) の状態 $x(k)$ の観測から、 N ステップ未来までの制御入力を計算する。通常モデル予測制御 [1] では、計算された制御入力のうち、一番はじめのもののみを送信するが、パケット化予測制御では、すべての制御入力を次式のようにパケット化し送信する。

$$U(x(k)) \triangleq \begin{bmatrix} u_0(x(k)) & \dots & u_{N-1}(x(k)) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N \quad (2)$$

送信されたパケットは受信側でバッファに記憶される (図 1 を見よ)。もし時刻 $k+1$ で送信パケットがロスしたとすると、入力 $u(k+1)$ として、バッファに記憶された $u_1(x(k))$ を用いる。同様に時刻 $k+2$ でパケットロスが起これば、 $u(k+2) = u_2(x(k))$ とする。パケット化予測制御のより詳細な定式化は [3] を参照せよ。上記の操作は N 回連続でパケットロスが起こるまで可能である。本稿では、 $N+1$ 回以上連続でパケットロスが起こらないと仮定する。

3 スパースな制御パケットの設計

(2) の制御パケットをスパースにする、すなわち、パケット $U(x(k))$ の要素 $u_i(x(k))$ がなるべく 0 になるような制御を考える。送信パケットがスパースであれば、パケットを符号化するとき、密なパケットよりも大きくデータ圧縮が可能である。実際に、スパースなパケッ

トは密なパケットよりもエントロピーが小さくなることを第4節で数値例により示す。

スパース性は ℓ^1 ノルムでよく近似できることが知られている。そこで、制御入力パケットを ℓ^1 ノルムで評価した次の ℓ^1/ℓ^2 評価関数を考える。

$$J(U, x(k)) \triangleq \|x(N|k)\|_P^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|x(i|k)\|_Q^2 + \mu \sum_{i=0}^{N-1} |u_i|. \quad (3)$$

ここで $U = [u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]^\top$ である。また $x(i|k)$ は時刻 k での観測 $x(k)$ にもとづく時刻 $k+i$ での状態の予測であり、 $x(i+1|k) = Ax(i|k) + Bu_i, i = 0, 1, \dots, N-1, x(0|k) = x(k)$ により逐次的に定義される。パラメータ $P > 0, Q > 0, \mu > 0$ は任意に定めることができるが、閉ループ系の安定性や制御性能とスパース性のトレードオフを考慮して決定する。詳しくは [2] を参照せよ。評価関数 (3) は、ある行列 G, H を用いて

$$J(U, x(k)) = \|GU - Hx(k)\|_2^2 + \mu \|U\|_1 + \|x(k)\|_Q^2 \quad (4)$$

と書き換えることができる [2]。評価関数 (4) は凸関数であり、これを最小化する大域的最適解を求める効率の良いアルゴリズムが知られている [4]。

4 設計例

本節では提案法の有効性を確認するために、数値例題を示す。状態空間の次元を $n = 4$ とし、制御対象の行列 A, B を平均 0、分散 1 の正規分布からのランダムサンプルによって生成する。制御ホライズンの長さを $N = 5$ とし、評価関数 (3) の重みを $\mu = 100, Q = I$ とする。また P は次の Riccati 方程式の解とする。

$$P = A^\top P A - A^\top P B (B^\top P B + \mu)^{-1} B^\top P A + Q.$$

これは閉ループ系の安定性を保証するためである [2]。また、比較のため、通常 ℓ^2 評価関数を最適化する従来のパケット化予測制御も考察する [3]。

この2つのネットワーク化制御系に対して、パケットロスをランダムに発生させ、シミュレーションを行う。表 1 に最初の 5 ステップまでの制御入力パケットを示す。この表から分かるように、提案法では従来法に比べスパースなパケットが得られていることが分かる。図 2 は状態 $x(k)$ の 2 ノルムを示している。これより、制御性能は提案法と従来法でほぼ同等であることがわかる。次に、初期値 $x(0)$ をランダムに与え、10000 回のシミュレーションを行ない、送信パケットのエントロピーの平均値を求めると、提案法の ℓ^1/ℓ^2 最適化では 12.2560、従来法の ℓ^2 最適化では 15.5701 となった。これより、送

表 1: Control packets $U(k_i)$

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
ℓ^1/ℓ^2	-2.632	0	-1.809	-0.085	-0.909
	0.085	-1.825	0	-0.890	0
	-2.211	-0.022	-0.826	0.21	0.157
	0	-0.753	0	0	0.322
	0	0	0	0	0
ℓ^2	-2.632	0.007	-1.733	-0.137	-0.651
	-0.106	-1.74	-0.154	-0.759	0.292
	-1.869	-0.162	-0.778	0.169	-0.465
	0.102	-0.762	0.207	-0.213	0.150
	-0.679	0.213	-0.201	0.229	-0.224

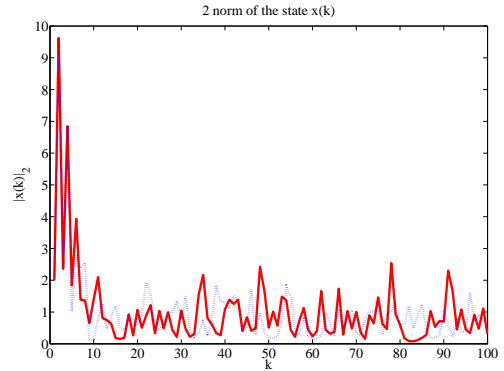


図 2: ℓ^2 norm of the state $x(k)$: proposed ℓ^1/ℓ^2 (solid) and conventional ℓ^2 (dots)

信信号は従来法に比べ、より情報圧縮が可能であることがわかる。

5 おわりに

本稿では、ネットワーク化制御系におけるパケットロスに対応するためのパケット化予測制御に対し、送信パケットのスパース化を行うことによって、送信信号の情報圧縮が可能であることを数値例により示した。スパース表現とエントロピーとの関連についての理論的な考察は今後の課題である。

参考文献

- [1] J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*, Pearson Education, 2002.
- [2] M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, 2011. (accepted)
- [3] D. E. Quevedo and D. Nešić, Input-to-state stability of packetized predictive control over unreliable networks affected by packet-dropouts, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 56, No. 2, pp. 370–375, 2011.
- [4] M. Zibulevsky and M. Elad, L1-L2 optimization in signal and image processing, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 27, pp. 76–88, 2010.