サンプル値制御理論による適応フィルタ設計

Design of Adaptive Filters via Sampled-Data Control Theory

京都大学　○ 永原 正章　山本 裕

M. Nagahara and Y. Yamamoto

Abstract Design and analysis of adaptive algorithms such as LMS (Least Mean Square) are conventionally done by assuming that the adaptive systems are discrete-time systems. However, in real systems such as active noise control, systems to be adapted are continuous-time ones. Therefore, such systems should be designed and analyzed as sampled-data systems. In this article, we propose a design of adaptive systems taking account of continuous-time behaviors via lifting technique in sampled-data control theory.

1 はじめに

本研究では，アクティブ消音で通常よく用いられる filtered-x 適応アルゴリズム [2] を考察する．この filtered-x 適応アルゴリズムのほとんどは，対象システムを離散時間システムと仮定して議論が進められている．

しかし，アクティブ消音で考察する対象システム（ダクトやマイク，スピーカ等）は連続時間システムであり，それらの連続時間特性を考慮した解析や設計が望ましい．

そこで本研究では，サンプル値制御理論 [1] を用い，連続時間特性を考慮した離散時間の適応フィルタ設計法を提案する．

2 アクティブ消音における適応アルゴリズム

図 1 のアクティブ消音システムを考える．この図において，$x_c(t)$ はダクトに入力する雑音（参照信号）であり，連続時間信号である．この信号を A 点に設置したマイクにより測定し，AD 変換器によりディジタル信号に変換する（これを x とする）．フィルタ $K(z)$ により，この信号が処理され，DA 変換器を介してスピーカ B から音として出力される．このシステムの目的は，ディジタルの処理系 $K(z)$ をうまく設計することで，C 点での誤差信号 $e(t)$ をなるべく小さくすることである．

このシステムのブロック線図を図 2 に示す．この図において，$P(s)$ は図 1 の A 点から C 点までの一次経路の伝達関数，また，$F(s)$ は B 点から C 点までの二次経路の伝達関数であり，ともに連続時間システムである．AD 変換器は，サンプル周期 h で動作する理想サンプラ $\mathcal{S}_h$ によってモデル化し DA 変換器は周期 h で動作するゼロ次ホールド $\mathcal{H}_h$ とする．

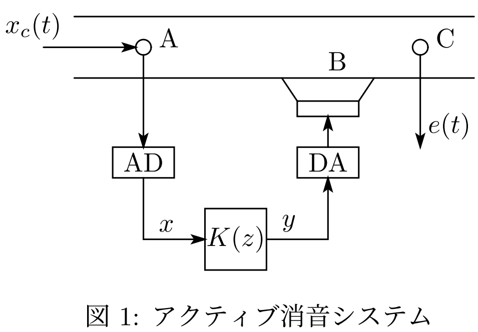

図 1: アクティブ消音システム

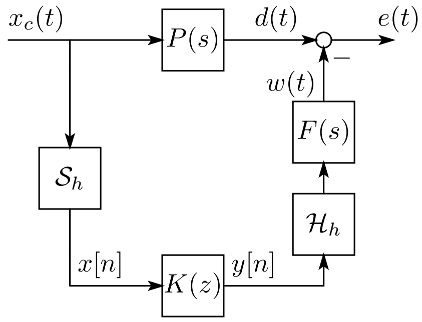

図 2: アクティブ消音システムのブロック線図

本研究では，以下の問題を考える．

問題 1 与えられた実数 $T > 0$ （ただし $T = mh$, m は自然数とする）に対して，次の連続時間評価関数

$$J = \int_0^T |e(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1}$$

を最小化する離散時間適応フィルタ

$$K[n](z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k[n] z^{-k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

を求めよ．

この問題は，従来の適応フィルタの問題と異なり，連続時間の評価関数を最適化する離散時間フィルタを求める問題である．また，取り扱う信号を従来のような確率過程でなく，確定的な信号としているのも本問題の特徴である．このような問題に対するアプローチとしては，サンプル値制御理論が有効である．

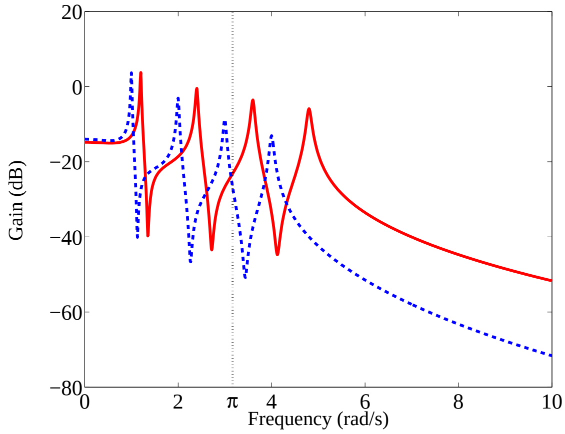

図 3: $F(s)$（実線）と $P(s)$（破線）の周波数応答．点線は Nyquist 周波数を示す．

3　サンプル点間応答を考慮した適応フィルタ

サンプル値制御理論におけるリフティング [1] により，L^2 の連続時間信号は関数空間 $L^2[0,h)$ に値を持つ離散時間信号となり，図 2 のサンプル値系は，(無限次元の）離散時間系として記述できる．また連続時間の評価関数 (1) も等価的に離散時間信号に対する評価関数に変換される．離散時間信号のとる値の無限次元性に注意すれば，適応アルゴリズムは，従来の離散時間系の場合と同じように導出でき，フィルタ (2) の係数 $a_k[n]$ の更新則は以下で与えられる [3]．

$$a_k[n+1] = a_k[n] + \mu \int_0^{nh} e(t)^\top u(t-kh)\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \ldots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

ただし $u = F\mathcal{H}_h\mathcal{S}_h x_c$ である．ここで，(3) の積分計算は，誤差信号 $e(t)$ をサンプル周期 h/L（L は自然数）で高速サンプルすることにより，近似計算が可能である [4]．

4　数値例

ここでは，数値例により提案手法の有効性を示す．サンプル周期を $h = 1$ とし，区間の長さを $T = 50$ とする．積分の近似計算のための高速サンプル比を $L = 8$ とする．適応フィルタのタップ数を $N = 8$ とする．伝達関数 $F(s)$ と $P(s)$ をそれぞれ $\omega = 1, 2, 3, 4$ と $\omega = 1.2, 2.4, 3.6, 4.8$ にピークを持つ振動系とする（図 3）ここで，ナイキスト周波数は $\omega = \pi$ であるが，これらのシステムはその周波数以上にもピークを持っていることに注意する．入力 $x_c(t)$ を周期 $T = 50$ の矩形波とする（図 4）．時刻 $t > T$ でのフィルタ係数は $a_k[51]$ $(k = 0, \ldots, 7)$ で固定

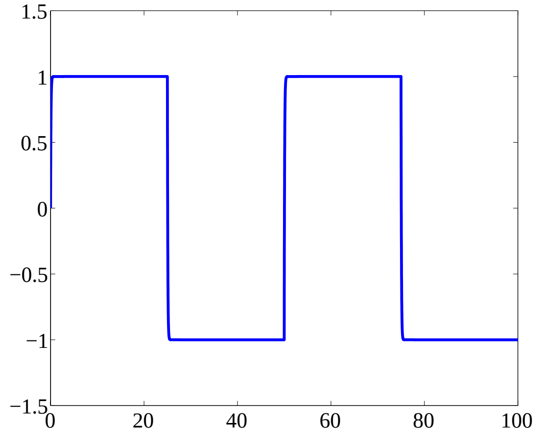

図 4: 入力 $x_c(t)$

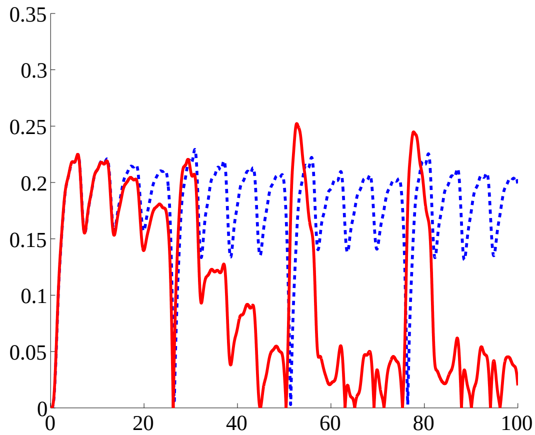

図 5: 誤差 $|e(t)|$: 提案手法（実線），従来法（破線）

する．図 5 に誤差信号の絶対値 $|e(t)|$ を示す．同時に従来法の filtered-x 適応アルゴリズムによるシミュレーション結果も示す．この結果より，ナイキスト周波数より高い周波数にピークを持つような連続時間システムに対して，サンプル点間応答を考慮した本手法は従来法よりも有効であると言える．

参考文献

[1] T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)

[2] 西村, 宇佐川, 伊勢: アクティブノイズコントロール, コロナ社 (2006)

[3] 永原, 山本: サンプル値制御理論による適応アルゴリズムの設計; 第 8 回 SICE 制御部門大会 (2008)

[4] M. Nagahara and Y. Yamamoto: Hybrid design of filtered-x adaptive algorithm via sampled-data control theory; *ICASSP2008* (2008)