不等間隔デシメーションのサンプル値制御理論による補間

Interpolation of Nonuniform Decimation via Sampled-data Control

京都大学　永原正章　○小蔵正輝　山本裕
M. Nagahara M. Ogura and Y. Yamamoto

Abstract In this paper, we consider signal interpolation of discrete-time signals which are decimated nonuniformly. The design problem is formulated as one of a nonuniform filterbank. A conventional design is based on the sampling theorem, and the resulting system consists of an ideal filter with complex coefficients. On the other hand we adopt sampled-data H^∞ optimization, which can take account of intersample behavior, and the optimal filter with real coefficients is obtained. An example shows the effectiveness of our method.

1 はじめに

補間はディジタル信号処理において基本的な操作であり，信号の復元，圧縮／復号，リサイズ／回転など多くの応用がある [4]．時間について等間隔なディジタル信号の補間は，アップサンプラとディジタルフィルタの組により行われる．このフィルタは補間フィルタ [4] と呼ばれ，その設計はサンプリング定理に基づき従来行われてきた．

時間について不等間隔な信号の補間を必要とする場合もあり，例としては時間多重 AD 変換器 [3] が挙げられる．この場合の補間フィルタは一般化サンプリング定理に基づき設計され，複素係数の理想低域通過フィルタが得られる [5, 4]．

一方，我々はフィルタの設計にサンプル値 H^∞ 最適化を用いる [1, 2]．これにより，サンプル点間における元のアナログ信号の挙動を考慮に入れることができる．さらに，得られる最適フィルタは実係数であるという利点をもつ．また，数値例により提案法の有効性を示す．

2 不等間隔なデシメーションと補間

図 1 のような離散時間信号 $x := \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ を考える．$\mathbf{M} := [1, 1, 0]$ による不等間隔デシメーションを $(\downarrow \mathbf{M})x := \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_6, \ldots\}$ で定義する．この作用素は，まず時間軸を長さ 3 ($\mathbf{M}$ の列数) の区間に分割し，それぞれの区間において，$\mathbf{M}$ の値が 1 である列に対応するサンプル値を保持し，0 である列に対応するサンプル値を捨てるという働きをする．

次に不等間隔に間引かれた信号の補間を考える．不等間隔アップサンプラを $(\uparrow\mathbf{M})x := \{x_0, x_1, 0, x_2, x_3, 0, x_4, \ldots\}$ で定義する．この作用素は，まず時間軸を長さ 2 ($\mathbf{M}$ における要素 1 の個数) の区間に分割し，$\mathbf{M}$ の値が 0 である列に対応する部分に 0 を挿入する．間引かれた信号 $(\downarrow\mathbf{M})x$ にこのアップサンプラを作用させることにより，

$$v := (\uparrow\mathbf{M})(\downarrow\mathbf{M})x = \{x_0, x_1, 0, x_3, x_4, 0, x_6, \ldots\}$$

を得る．これをディジタルフィルタ $\mathcal{K}$ で処理することで補間が行われる．図 3 (a) にここまでの過程を示す．

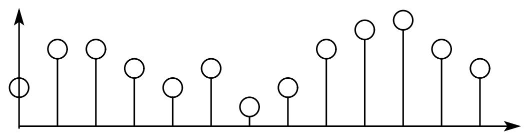

図 1: 離散時間信号 x

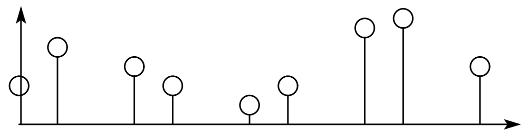

図 2: 不等間隔デシメーション ($\mathbf{M} = [1, 1, 0]$)

3 補間フィルタの設計

この節では，間引きのパラメータが $\mathbf{M} := [b_1, \ldots, b_M]$ ($b_i \in \{0, 1\}$) である一般の場合を考察する．$b_i = 1$ であるような引数 i を小さい順に $i_1, \ldots, i_N$ とする．補間過程 $\mathcal{K}(\uparrow\mathbf{M})(\downarrow\mathbf{M})$ は，周期時変であるから離散時間リフティング [1] (またはポリフェーズ分解 [4])

$$\mathbf{L}_M : \{x_0, x_1, \ldots\} \mapsto \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_M \\ \vdots \\ x_{2M-1} \end{bmatrix}, \ldots \right\}$$

により等価な時不変システム $\mathcal{K}(\uparrow\mathbf{M})(\downarrow\mathbf{M}) = \mathbf{L}_N^{-1}\widetilde{\mathcal{K}}E\mathbf{L}_M$, $\widetilde{\mathcal{K}} := \mathbf{L}_N\mathcal{K}\mathbf{L}_N^{-1}$ に変換される．ただし E は $N \times M$ 行列であり，その (i, j) 要素 E_{ij} の値は $(i, j) = (1, i_1), \ldots, (N, i_N)$

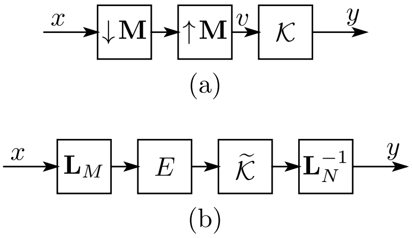

図 3: (a) 不等間隔デシメーションと補間，(b) リフト後のシステム

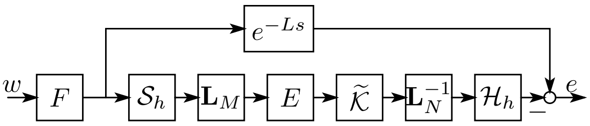

図 4: 誤差系

のときは 1，それ以外の場合は 0 である．例えば $\mathbf{M} = [1, 1, 0]$ $(M = 3,\ N = 2,\ i_1 = 1,\ i_2 = 2)$ のときは

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．リフトされたフィルタ $\widetilde{\mathcal{K}}$ は N 入力 N 出力の時不変システムである．

補間フィルタ $\mathcal{K}$ (すなわち $\widetilde{\mathcal{K}}$) の設計のために，図 4 の誤差系を考える．この図において，F は厳密にプロパーな連続時間線形時不変システムであり，サンプリング前の連続時間信号のモデルである．$\mathcal{S}_h$ と $\mathcal{H}_h$ は，それぞれサンプリング周期が h の理想サンプラと 0 次ホールドを表す．遅れ e^{-Ls} は信号復元の遅れと性能を調節するパラメータである．そして，補間フィルタ設計問題をサンプル値 H^∞ 最適化問題として定式化する:

問題 1 図 4 における誤差系の H^∞ ノルム (L^2 誘導ノルム) を最小化するフィルタ $\widetilde{\mathcal{K}}$ を求めよ．

高速サンプルの手法により最適フィルタ $\widetilde{\mathcal{K}}$ が得られ，ポリフェーズ表現によりフィルタ $\mathcal{K}$ が得られる [1, 2].

4 設計例

この節では数値例を示す．設計パラメータはそれぞれ $\mathbf{M} = [1, 1, 0]$，$h = 1$，$F(s) = 1/(10s + 1)$ とし，遅れは $L = 12$ とする．そしてヒルベルト変換器による従来法 [5, 4] との比較を行う．この手法は，元のアナログ信号がナイキスト周波数 π の 2/3 の周波数 $\omega = 2\pi/3$ までで完全帯域制限されていると仮定し，サンプリング定理に基づく手法である．さらに $L = 61.5$ という大きな復元遅れを必要とする．図 5 は図 4 の誤差系の周波数応答である．サンプル値 H^∞ 最適化による補間は平坦な応答を示すのに対し，従来法による補間は高周波帯域において大きな誤差を示す．図 6 に矩形波の補間を示す．従来法は大きなリップルを示すのに対し，提案法は良い応答を示す．これは矩形波のエッジ周辺にあるような高周波成分を提案法は考慮しているためである．

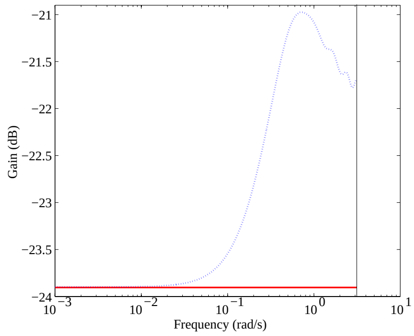

図 5: 周波数応答: 提案法（実線），従来法（点線）

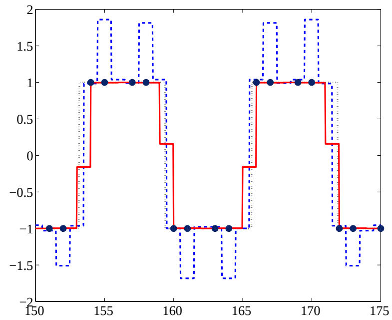

図 6: 時間応答: 提案法（実線），従来法（破線），入力信号（点線）

参考文献

[1] T. Chen and B. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)

[2] M. Nagahara and Y. Yamamoto: A new design for sample-rate converters; *Proc. 39th IEEE CDC*, pp. 4296–4301 (2000)

[3] T. Strohmer and J. Tanner: Fast reconstruction algorithms for periodic nonuniform sampling with applications to time-interleaved ADCs; *Proc. of ICASSP 2007*, Vol. 3, pp. III-881–III-884 (2007)

[4] P. P. Vaidyanathan: *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall (1993)

[5] P. P. Vaidyanathan: Efficient reconstruction of band-limited sequences from nonuniformly decimated versions by use of polyphase filter banks; *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 38, pp. 1927–1936 (1990)