一般化 KYP 補題による $\Delta\Sigma$ 変調器の最適設計

Optimal Design of $\Delta\Sigma$ Modulators via Generalized KYP Lemma

京都大学　○ 川上　真司　永原　正章　山本　裕

S. Kawakami　M. Nagahara　and Y. Yamamoto

Abstract　In this paper, we propose a new method for designing delta-sigma modulators. In delta-sigma modulators, the accumulator is conventionally used in a feedback loop to reduce quantization noise. In contrast, we propose an H^∞ design to shape the frequency response of the noise transfer function. The design is formulated as frequency domain inequalities in finite frequency ranges, which is reduced to linear matrix inequalities via generalized Kalman-Yakubovic-Popov (GKYP) lemma. A design example is presented to show that our design is superior to conventional ones.

1　はじめに

$\Delta\Sigma$ 変調器は，高性能の AD および DA 変換器に用いられ，計測やディジタル音声処理，無線通信などに用いられる [3]. オーバーサンプリング処理と $\Delta\Sigma$ 変調器を組み合わせることによって，低ビット（通常は１ビット）の量子化にもかかわらず高解像度を持つ変換器を構成できる．

図 1 に $\Delta\Sigma$ 変調器のブロック線図を示す．ここで $H=[H_1, H_2]$ は 2 入力 1 出力の線形システムであり，Q は量子化器である．システム H の役割は，入力 u から出力 y までのシステムの伝達関数の周波数特性をオールパスまたはローパスとし，量子化誤差 $n := Q\psi - \psi$ から出力 y までのシステムの伝達関数の周波数特性をハイパスにすることである．これにより，出力への量子化誤差の影響が高周波側に集まるので，もとのサンプリング周波数（例えばオーディオＣＤでは 44.1KHz）の整数倍（8 倍や 16 倍から数百倍まで）でオーバーサンプリングすることにより，元信号を低周波側へ，量子化誤差を高周波側へ分離することが可能となる．分離後，ローパスフィルタにより元信号を取り出せば元の信号が復元できる．

このような $\Delta\Sigma$ 変調器における周波数整形には H^∞ 制御が適している．文献 [2] では，図 1 の $\Delta\Sigma$ 変調器を 2 自由度制御系ととらえ，上記の周波数整形問題を離散時間 H^∞ 制御問題として定式化し，設計パラメータを FIR (Finite Impulse Response) フィルタと仮定することにより，設計問題が線形行列不等式に帰着されることが示されている．しかしこの場合，所望の周波数整形を行うためには，重み関数を試行錯誤的に決定する必要がある．そこで，本論文では，一般化 KYP (Kalman-Yakubovich-Popov) 補題 [1] を用い，設計問題を定式化する．これにより，ある周波数帯域でゲインをある値以下にするといった設計仕様が可能となり，従来法に比べより使いやすい設計法を与えることができる．

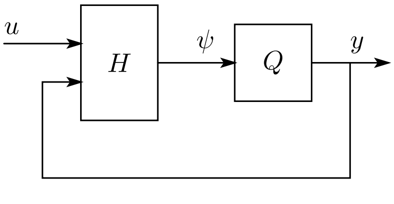

図 1: $\Delta\Sigma$ 変調器

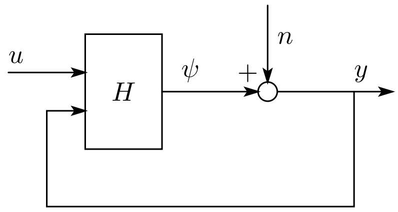

図 2: $\Delta\Sigma$ 変調器の線形化モデル

2　$\Delta\Sigma$ 変調器における周波数整形

ここでは $\Delta\Sigma$ 変調器における線形システム H の役割について考える．量子化器 Q は非線形システムであるので，解析を容易にするために線形化モデルを導入する．量子化誤差を $n := Q\psi - \psi$ とおき，この量子化誤差 n が入力 ψ に依存しないと仮定すると，図 2 の付加雑音線形モデルが得られる．このモデルを用いれば，$\Delta\Sigma$ 変調器の入出力関係は $y = T_{yu}u + T_{yn}n$ となる．ここで

$$T_{yu}(z) := \frac{H_1(z)}{1-H_2(z)}, \quad T_{yn}(z) := \frac{1}{1-H_2(z)}$$

である．たとえば 1 次の $\Delta\Sigma$ 変調器 [3] では，$H_1(z) = z/(z-1)$, $H_2(z) = -1/(z-1)$ であり，$y = u+(1-z^{-1})n$

となる．このとき，$T_{yn}(z) = 1 - z^{-1}$ はハイパス特性を持つため，量子化誤差 n は高周波側に寄ることになる．これからわかるように，一般に，$T_{yn}(z)$ の役割は誤差 n から出力 y までのシステムの周波数応答をハイパスにすることである．また，$T_{yu}(z)$ は入力 u から出力 y までのシステムをオールパスまたはローパスにする役割がある．

3　一般化 KYP 補題によるループフィルタ設計

図 2 の 2 自由度フィードバック制御系を内部安定化するすべてのコントローラ $H(z) = [H_1(z), H_2(z)]$ は次で特徴付けられる [2].

補題 1　図 2 のフィードバック系が well-posed であり，かつ内部安定化するすべての $H_1(z)$ および $H_2(z)$ は

$$H_1(z) = \frac{R_1(z)}{1 + R_2(z)}, \quad H_2(z) = \frac{R_2(z)}{1 + R_2(z)}$$

で与えられる．ここで $R_1(z)$ は安定かつプロパーな任意の有理伝達関数，$R_2(z)$ は安定かつ厳密にプロパーな任意の有理伝達関数である．

設計パラメータ $R_1(z)$ と $R_2(z)$ を用いれば，図 2 のシステムの入出力関係は $y = R_1 u + (1 + R_2)n$ で与えられ，$T_{yu} = R_1$，$T_{yn} = 1 + R_2$ であることがわかる．以降，簡単のため $R_1 = 1$ とし，$R_2 = R$ とおく．補題 1 より，図 1 の $\Delta\Sigma$ 変調器の設計問題は以下のように定式化される．

問題 1　与えられた $\gamma > 0$ と Ω $(0 < \Omega < \pi)$ に対して，

$$\sup_{\omega \in [0, \Omega]} |T_{yn}(e^{j\omega})| < \gamma \tag{1}$$

を満たす安定かつ厳密にプロパーな $R(z)$ を求めよ．

フィルタ $R(z)$ を FIR とし，

$$R(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}, \quad a_0 = 0$$

とおく．$R(z)$ の実現を $\{A, B, C(\alpha), 0\}$ とする．ここで，$\alpha := [a_1, \ldots, a_{N-1}]$ は FIR フィルタの係数であり，A と B は α に依存せず，$C(\alpha)$ は α に対してアフィンに依存することに注意する．一般化 KYP 補題 [1] により，不等式条件 (1) は，以下の不等式を満たす対称行列 $Q > 0$ と P が存在することと等価である．

$$\begin{bmatrix} A^\top PA + QA + A^\top Q - P - 2Q\cos\Omega & A^\top PB + QB & C(\alpha)^\top \\ (A^\top PB + QB)^\top & B^\top PB - \gamma^2 & 1 \\ C(\alpha) & 1 & -1 \end{bmatrix} < 0.$$

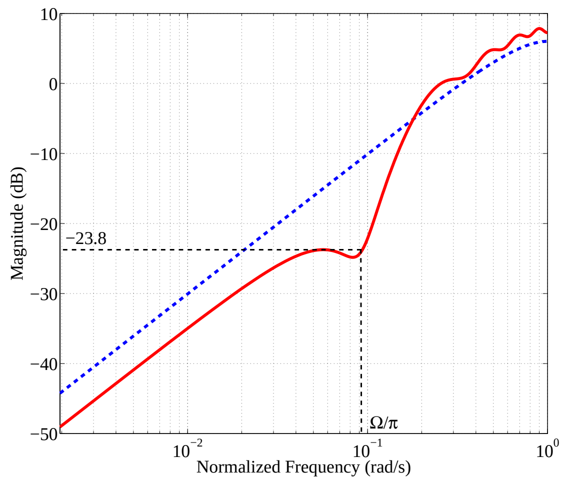

図 3: T_{yn} の周波数応答（ゲイン）：提案法（実線），1 次 $\Delta\Sigma$ 変調器（破線）

この不等式は P, Q, α, に関する線形行列不等式 (LMI) となっており，最適化ソフトウェア等を用いることにより，容易に最適解を得ることが可能である．

4　設計例

FIR フィルタ $R(z)$ のタップ数を $N = 11$，有限周波数を $\Omega = 3\pi/32$ とし，(1) の γ を最小化するフィルタ $R(z)$ を設計する．また，直流の入力信号に対し誤差を 0 にするために，T_{yn} がゼロ点を $\omega = 0$ $(z = 1)$ に一つ持つ条件を加える．これは線形拘束条件となる [2]．さらに，非線形フィードバック系が安定となるために，ゲイン条件 $\|R\|_\infty < 1.5$ を課す．この不等式は通常の KYP 補題により LMI となる [2]．このとき γ 最小値は $6.48 \times 10^{-2} = -23.8$dB となる．図 3 に設計された $\Delta\Sigma$ 変調器の T_{yn} の周波数応答（ゲイン）を示す．1 次 $\Delta\Sigma$ 変調器に比べ，提案法は低周波域でゲインが低く，高周波域でゲインが高くなっていることがわかる．

参考文献

[1] T. Iwasaki and S. Hara: Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 41–59 (2005)

[2] 永原, 山本: H^∞ 制御を用いた $\Delta\Sigma$ 変調器の設計; 第 35 回制御理論シンポジウム, pp. pp. 301–304 (2006)

[3] R. Schreier and G. C. Temes: *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, Wiley (2005)