

予測量子化器の安定性と性能の解析

An analysis of stability and performance for differential pulse code modulation

京都大学大学院 情報学研究科 永原 正章, 山本 裕
 M. Nagahara, Y. Yamamoto
 Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract The differential pulse code modulation(DPCM) is a feedback system with quantization. Since quantization is a nonlinear operator, it is difficult to analysis its stability and performance. Usually the quantization operator is modeled by an additional disturbance model, and we analyze its stability and performance by using the model. We show that the model is useful for analyzing and designing DPCM systems.

1 はじめに

アナログ信号からデジタル信号への変換には, 時間を離散化する標本化と振幅を離散化する量子化が必要である. 標本化は線形変換であるため扱いが比較的容易であるが, 量子化は非線形変換であり, その取り扱いは難しい. そこで量子化の操作を付加雑音でモデル化し, 量子化を含むシステムを線形化する手法が従来より用いられてきた [1]. しかし, この線形化モデルにたいして設計を行なったさい, もとの非線形システムにたいしてはどのような性質が成り立つのかという議論はこれまであまりなされていない.

本稿では, この付加雑音モデルを用いて設計された予測量子化器 [2] の安定性と性能の解析を行なう. すなわち, まず付加雑音モデルが安定であれば, もとの予測量子化器は弱い意味で安定であることを示し, 次に付加雑音モデルの H^∞ 性能ともとの予測量子化器の性能との間にある関係があり, 付加雑音モデルにたいする H^∞ 設計が有効であることを示す.

2 予測量子化器の状態空間モデル

図 1 に予測量子化器のブロック線図を示す.

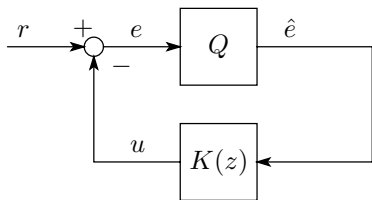


図 1: 予測量子化器のブロック線図.

この図で Q は量子化レベル Δ の一様量子化とし, ま

た $K(z)$ はデジタルフィルタである. 例えばデルタ変調器 [2] では $K(z) = 1/(z - 1)$ である. フィルタ $K(z)$ の実現を $\{A_K, B_K, C_K, D_K\}$ とおく.

次に予測量子化器にたいして, 図 2 のように付加雑音モデルを用いる. ここで $\|d\|_\infty = \|e - \hat{e}\|_\infty \leq \Delta/2$ が

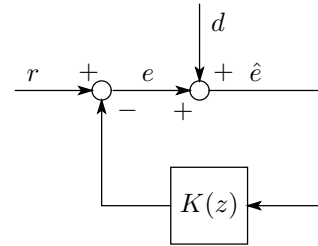


図 2: 予測量子化器の付加雑音モデル.

成立することより, 付加雑音モデルは一様量子化の入出力関係を帯状の領域でおおうモデルであることがわかる (図 3 参照). すなわち一様量子化器 Q を次のようにモ

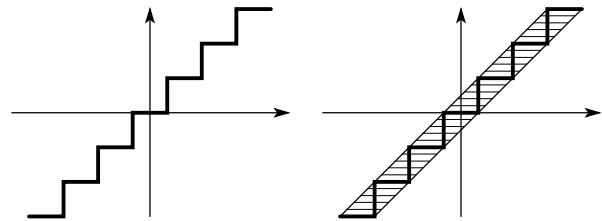


図 3: (左) 一様量子化, (右) 付加雑音モデル.

デル化する.

$$Q: \hat{e} = e + d, \quad \|d\|_\infty \leq \Delta/2.$$

この付加雑音モデルを用いると, 図 1 の予測量子化器

の状態空間表現は次のように書ける．

$$x[n+1] = Ax[n] + B_1r[n] + B_2d[n], \quad (1)$$

$$e[n] = Cx[n] + D_1r[n] + D_2d[n], \quad (2)$$

$$A := \frac{A_K - B_K C_K}{1 + D_K}, \quad C := -\frac{C_K}{1 + D_K}$$

$$B_1 := \frac{B_K}{1 + D_K}, \quad B_2 := \frac{B_K}{1 + D_K}$$

$$D_1 := \frac{1}{1 + D_K}, \quad D_2 := -\frac{D_K}{1 + D_K}.$$

3 予測量子化器の安定性

ここでは $r = 0$ とおく．図 2 の付加雑音モデルは線形モデルであるから，この安定性は (1) の行列 A の安定性を調べることに容易に判別できる．このとき，図 1 の予測量子化器の安定性については次の定理が成り立つ．

定理 1 行列 A を安定行列とする．このとき，(1) の予測量子化器において，任意の初期値 $x[0]$ にたいして，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x[n]\|_{\infty} \leq \frac{\|B\|}{1 - \|A\|} \cdot \frac{\Delta}{2} \quad (3)$$

が成り立つ．

証明 (1) より

$$\begin{aligned} \|x[n] - A^n x[0]\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k=1}^n A^{n-k} B d[k] \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\Delta}{2} \|B\| \sum_{k=1}^n \|A\|^{n-k}. \end{aligned}$$

行列 A は安定であるから，任意の $x[0]$ にたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x[0] = 0.$$

したがって (3) が成り立つ．

□

この定理より，図 2 の線形モデルにたいして安定化すれば，もとの図 1 の予測量子化器にたいして，上の定理で示したような弱い意味での安定性が保証されることがわかる．

4 予測量子化器の性能

予測量子化器では通常，量子化雑音がなるべく小さくなるようにフィルタ $K(z)$ が決定される．その方法の一つとして，量子化雑音 d を外乱とみなして H^{∞} 設計を行なうことが考えられる．ここでは，図 2 の線形化モデ

ルにたいして H^{∞} 設計を行なった場合に，図 1 の予測量子化器に関してどのような性能が保証されるかを述べる．ここで図 2 において d から e への伝達関数を T_{ed} とおく．また，信号のパワーを次式で定義する．

$$\text{pow}(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N |z[k]|^2.$$

このとき次の定理が成り立つ．

定理 2

$$\text{pow}(e) \leq \|T_{ed}\|_{\infty} \cdot \frac{\Delta}{2}.$$

証明 図 2 において r から e への伝達関数を T_{er} とおく．ただし $\|T_{er}\|_{\infty}$ は有限とする．このとき予測量子化器は $e = T_{er}r + T_{ed}d$ ($\|d\|_{\infty} \leq \Delta/2$) と書ける．ここで， $T_{er}r$ は l^2 信号であるから

$$\begin{aligned} \text{pow}(e) &= \text{pow}(T_{er}r + T_{ed}d) \\ &\leq \text{pow}(T_{er}r) + \text{pow}(T_{ed}d) \\ &= \text{pow}(T_{ed}d) \\ &\leq \|T_{ed}\|_{\infty} \|d\|_{\infty} \\ &\leq \|T_{ed}\|_{\infty} \frac{\Delta}{2}. \end{aligned}$$

□

この定理より，図 2 の線形化モデルにたいして，量子化雑音 d を外乱とみなして H^{∞} 設計を行なったとき， $\|T_{ed}\|_{\infty}$ が十分小さければ，もとの予測量子化器の出力 e もパワーの意味で小さくなるのがわかる．すなわち，図 2 の付加雑音モデルにたいして H^{∞} 設計が有効であることがわかる．

5 おわりに

本稿では付加雑音モデルを用いて設計された予測量子化器の安定性と性能の解析を行なった．本稿の定理を用いることにより，付加雑音を外乱とみなして設計を行なったときの予測量子化器の安定性と性能の評価を得ることができる．特に付加雑音モデルにたいして H^{∞} 設計が有効であることを示した．

参考文献

- [1] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems 3rd Ed.*, Addison Wesley (1998)
- [2] J. G. Proakis: *Digital Communications*, McGraw Hill (1989)