

## ネットワーク化制御系における制御信号のスパース表現

永原正章 (京都大学), 松田 崇弘 (大阪大学), 林 和則 (京都大学)

## Sparse representation of control signals for networked control

\*M. Nagahara (Kyoto Univ.), T. Matsuda (Osaka Univ.), K. Hayashi (Kyoto Univ.)

**Abstract**— In this presentation, we propose sparse representation of control signals in networked control systems where control signals are transmitted through a rate-limited channel. We use a technique of compressive sampling for designing sparse control signals. The design is described by  $\ell^1$ - $\ell^2$  optimization and the solution achieves an acceptable level of control performance and also gives sparse representation of control signals. Numerical examples show the proposed control shows a comparable performance to a conventional energy-limiting control with far less information of the transmitted control signal.

**Key Words:** networked control, compressive sampling,  $\ell^1$ - $\ell^2$  optimization

## 1 まえがき

ネットワーク化制御系とは, 制御対象と制御器とが物理的に離れており, それらの間の情報のやりとりが制約のある通信路を介して行われる制御系のことである<sup>10)</sup>. 本稿では, 制約のある通信路として無線通信路やインターネット等, 伝送帯域に制約のある通信路を考え, このような通信路上で転送される制御信号を効率的に圧縮するためのスパース表現を導入する.

信号のスパース表現とは, ある変換 (たとえば, Fourier 級数展開) のもとで, その係数の多くがゼロとなる表現であり, これにより信号を表現するためのデータ量を圧縮することができる. この手法は, 圧縮センシングや圧縮サンプリングとも呼ばれ, 信号処理や機械学習, 情報理論などで特に盛んに研究されており<sup>8, 15, 1)</sup>, 最近では通信においてもその有効性が示されている<sup>11, 12)</sup>.

本稿の目的は, フィードバックを含むネットワーク化制御系における制御信号の設計に圧縮サンプリングにもとづいた信号のスパース表現を導入し, その有効性を示すことである. 信号のスパース表現をネットワーク化制御系に応用する研究は, 近年いくつか提案されている. 文献<sup>2)</sup>では, フィードバック制御において, 制御対象の状態をスパースにするための変換法を提案し, そのもとで圧縮センシングによる状態推定を提案している. また, 文献<sup>13)</sup>では, モデル予測制御の枠組みでネットワーク化制御におけるスパース表現を考察している. 文献<sup>14)</sup>では, フィードフォワード制御系に対する制御信号のスパース表現を提案している.

本稿の構成は以下のとおりである. まず, 本稿で考えるネットワーク化制御系を定義し, 次に信号のスパース表現について解説する. これらにもとづき, ネットワーク化制御系に信号のスパース表現を導入した新しい制御系設計を提案する. 設計問題は  $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化に帰着され, 高速アルゴリズム<sup>6, 3, 17)</sup>により効率的に解を見つけることができる. 数値例によりネットワーク化制御系における提案手法の有効性を示す.

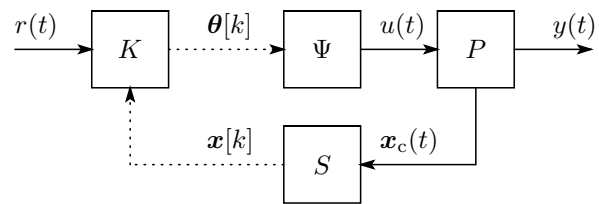


Fig. 1: ネットワーク化制御系: 点線は制約のある通信路を表す.

記法

ベクトル  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T \in \mathbb{R}^m$  に対して, その  $\ell^1$  ノルムおよび  $\ell^2$  ノルムをそれぞれ

$$\|\theta\|_1 := \sum_{i=1}^m |\theta_i|, \quad \|\theta\|_2 := \left( \sum_{i=1}^m |\theta_i|^2 \right)^{1/2}$$

で定義する. またベクトル  $\theta$  の非ゼロ要素の数を  $\|\theta\|_0$  で表す. 行列  $\Phi$  に対して, そのノルムを

$$\|\Phi\| := \max_{\|\theta\|_2 \neq 0} \frac{\|\Phi\theta\|_2}{\|\theta\|_2} = \sigma_{\max}(\Phi)$$

で表す. ここで  $\sigma_{\max}(\Phi)$  は行列  $\Phi$  の最大特異値である.

## 2 ネットワーク化制御系

本稿で考察するネットワーク化制御系のブロック線図を Fig. 1 に示す. このブロック線図において,  $P$  は制御対象であり, 次の状態空間方程式でモデル化されているとする.

$$P: \begin{cases} \dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + bu(t), \\ y(t) = c^T x_c(t), \quad t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

ただし, 初期値は  $x_c(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^\nu$  とし, また  $A \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^\nu$  とする.  $K$  はコントローラ,  $S$  はアナログ信号をデジタル信号に変換するエンコーダ,  $\Psi$  はデジタル信号をアナログ信号に変換するデコーダを表し, ブロック線図の点線は制約のある通信路を表す. 制御対象  $P$  の状態  $x_c(t)$  は, エンコーダ  $S$  により周期  $T > 0$  の離散時間信号

$$x[k] := x_c(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

に変換され、制御器  $K$  へ送信される。

本稿では、制御対象  $P$  の出力  $y$  を目標信号  $r$  に追従させる目標値追従問題を考える。ここで目標信号  $r$  は周期  $T$  の周期信号であるとする。制御器  $K$  では、目標信号  $r(t)$ ,  $t \in [kT, (k+1)T]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  と状態観測値  $x[k]$  から、デコーダ側で制御信号を構成するためのデジタル信号  $\theta[k]$  を生成し、周期  $T$  で制御対象側にあるデコーダ  $\Psi$  へ送信する。デコーダ  $\Psi$  では、受信したデジタル信号  $\theta[k]$  から連続時間の制御信号  $u(t)$ ,  $t \in [kT, (k+1)T]$  を生成し、制御対象へ印加する。

通信路においては、通常、送信信号のビットレートに制約がある。本稿では、特に信号  $\theta[k]$  の送信においてビットレート制約が大きく、 $\theta[k]$  を圧縮して送信したい状況を考える。その圧縮のために、次節で述べる信号のスパース表現を導入する。

### 3 信号のスパース表現

ここでは、信号のスパース表現について、文献<sup>8)</sup>の第9章に従って解説する。

変数  $\theta$  をもつ線形方程式

$$\Phi\theta = \alpha$$

を考える。ここで、 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^m$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \leq m$  とする。この方程式は、見方を変えると、ベクトル  $\alpha$  を行列  $\Phi$  の列ベクトルの線形結合で表現したものと考えることもできる。その意味で、 $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$  の列ベクトル  $\varphi_i$  を原子 (atom), 行列  $\Phi$  を原子の辞書 (dictionary of atoms) と比喩的に呼ぶ。

ベクトル  $\theta$  の非ゼロ要素の数を  $\|\theta\|_0$  で表すとし、 $\|\theta\|_0 = k_0 \ll m$  と仮定する。この  $k_0$  がベクトル  $\theta$  のスパースさを示す指標となる。このとき、掛け算  $\Phi\theta$  により辞書から原子  $\varphi_i$  を  $k_0$  種類選んで線形結合

$$\alpha = \Phi\theta = \sum_{i \in I} \theta_i \varphi_i, \quad I \subset \{1, \dots, m\}, \quad |I| = k_0 \quad (2)$$

が作られる。このようなプロセスを原子組成 (atomic composition) と比喩的に呼ぶ。

次に、非ゼロ要素の数が  $\|\theta\|_0 = k_0$  であるようなベクトル  $\theta$  の集合 ( $\mathbb{R}^m$  の部分集合) を考える。この集合に属するベクトルは、その非ゼロ要素がベクトルのどの位置にあるかによって  ${}^m C_{k_0}$  種類に分類される。このような集合のなかからベクトル  $\theta$  をランダムに選ぶ信号生成器を考える。まず、非ゼロ要素の位置を  ${}^m C_{k_0}$  種類の中から一様にランダムに選び、次に、ベクトル  $\theta$  の  $k_0$  個の非ゼロ要素を、それぞれ独立で同一の分布、すなわち平均 0、分散  $\sigma^2$  の Gauss 分布から選ぶ。この選ばれたベクトル  $\theta$  を用いて、線形結合 (2) により、ベクトル  $\alpha$  が得られる。以上より、スパースなランダム信号  $\alpha$  の生成器  $\mathcal{M}(\Phi, k_0, \sigma^2)$  が定義される。すなわち、行列  $\Phi$  と自然数  $k_0$ 、正の実数  $\sigma^2$  が定めれば、ベクトル  $\alpha$  の分布が定まる。言い換えると、生成器  $\mathcal{M}(\Phi, k_0, \sigma^2)$  は、 $\theta$  が上記で定義されるスパースなランダムベクトルとしたときの原子組成 (2) のモデルである。

ベクトル  $\alpha$  がセンシングにより得られるという状況を考えて、その観測値にはノイズが混入している可能性がある。すなわち、ランダムベクトル  $e \in \mathbb{R}^n$  (た

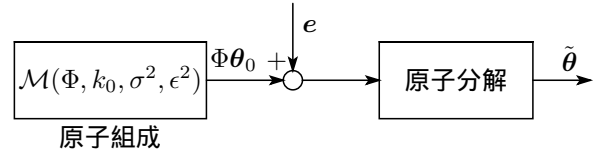


Fig. 2: Atomic decomposition:  $\tilde{\theta}$  is an estimation of  $\theta_0$ .

だし  $\|e\|_2^2 \leq \epsilon^2$  とする) によって、

$$\alpha = \Phi\theta + e$$

となっていると仮定する。このノイズの仮定を含めた信号の生成モデルを  $\mathcal{M}(\Phi, k_0, \sigma^2, \epsilon^2)$  と書き、これを Sparse Land モデルと呼ぶ<sup>9, 8)</sup>。なお、 ${}^m C_{k_0}$  種類の中から非ゼロ要素の位置を選ぶ過程や、ベクトル  $\theta$  の非ゼロ要素が属する分布は、上記に限定する必要はない。また、スパースさを表す  $k_0$  は固定であったが、これもランダムであるという状況も考えられる。そのような一般化された場合でも、広く Sparse Land と呼ぶ。

スパースな信号の生成器  $\mathcal{M}(\Phi, k_0, \sigma^2, \epsilon^2)$  から、ひとつのベクトル  $\alpha$  が飛び出てきたとしよう。この  $\alpha$  からもとのベクトル  $\theta_0$  を推定する問題が基本的であり、原子組成に対比させて原子分解 (atomic decomposition) と呼ばれる。Fig. 2 に原子分解のブロック線図を示す。

この問題に対して、次の最適化問題を考える:

$$(P_0^\epsilon): \quad \min_{\theta} \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|\alpha - \Phi\theta\|_2^2 \leq \epsilon^2.$$

この問題の解を  $\tilde{\theta}$  とおく。もし、もとのベクトルのスパースさ  $\|\theta_0\|_0 = k_0$  が十分小さければ、推定誤差  $\|\tilde{\theta} - \theta_0\|_2$  は  $\epsilon$  の定数倍以下となることが知られている<sup>8, Theorem 5.1)</sup>。しかし、最適化問題  $(P_0^\epsilon)$  は組み合わせ最適化問題であり、辞書のサイズ  $m$  が大きくなれば、計算量は指数関数的に増大し、解くことが難しくなる。この問題を回避するために、 $(P_0^\epsilon)$  を

$$(P_1^\epsilon): \quad \min_{\theta} \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\alpha - \Phi\theta\|_2^2 \leq \epsilon^2$$

に緩和した基底追跡ノイズ除去法 (basis pursuit denoising) やその Lagrange 双対である次の  $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化法

$$(Q_1^\lambda): \quad \min_{\theta} \|\alpha - \Phi\theta\|_2^2 + \lambda \|\theta\|_1$$

また  $(P_1^\epsilon)$  の不等式制約を変更し、

$$(P_{DS}^\gamma): \quad \min_{\theta} \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\Phi^\top(\alpha - \Phi\theta)\|_\infty \leq \frac{\gamma\epsilon}{\sqrt{n}}$$

とした Dantzig 選択器 (Dantzig selector) などにより、問題を凸化して解を見つけるのが現実的な方法である。これらの方法の詳細やその妥当性については<sup>8, 15, 1)</sup>などを参照されたい。

### 4 制御問題

ここでは、本稿で考察するネットワーク化制御の問題を定式化する。

第  $k$  周期目の区間  $[kT, (k+1)T]$  上における目標信号  $r$ 、制御信号  $u$  および出力信号  $y$  をそれぞれ  $r_k$ ,  $u_k$ ,

$y_k$  と表す．すなわち，

$$\begin{aligned} r_k(t) &:= r(t + kT), \quad u_k(t) := u(t + kT), \\ y_k(t) &:= y(t + kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

とする．本稿では目標値追従問題を考え，各周期  $k = 0, 1, 2, \dots$  において，以下の量をなるべく小さくする制御信号  $u_k$  を設計する．

$$\|Pu_k - r_k\|_2^2 := \int_0^T |(Pu_k)(t) - r_k(t)|^2 dt.$$

各周期  $k$  における目標信号  $r_k$  は下記の集合に属すると仮定する．

$$V_M := \text{span}\{\psi_m : m = -M, \dots, M\} \subset L^2[0, T].$$

ここで  $M$  は正の整数であり，また  $\psi_m$  は正弦波

$$\psi_m := \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(j\omega_m t), \quad \omega_m := \frac{2\pi m}{T}$$

である．すなわち集合  $V_M$  は，その周波数が  $\omega_M = 2\pi M/T$  [rad/sec] に帯域制限された  $L^2[0, T]$  信号の集合である．

制御信号  $u_k$  はデコーダ  $\Psi$  により制御対象  $P$  に印加される．現実の制御対象では，印加することのできる周波数に限りがある．したがって，制御信号  $u_k$  もある周波数に帯域制限される必要がある．そこで，目標信号  $r_k$  と同じく，制御信号  $u_k$  に対しても，周波数  $\omega_M = 2\pi M/T$  [rad/sec] までの帯域制限を仮定する．すなわち， $u_k \in V_M$  とし，その Fourier 展開係数を

$$\theta[k] = [\theta_{-M}[k], \theta_{-M+1}[k], \dots, \theta_M[k]]^\top \in \mathbb{R}^{2M+1}$$

とおく．このとき制御信号  $u_k$  は

$$u_k(t) = \sum_{m=-M}^M \theta_m[k] \psi_m(t) \in V_M \quad (3)$$

と表される．Fig. 1 に示すように，制御器  $K$  は制御信号  $u_k$  の Fourier 展開係数  $\theta[k]$  を通信路を通してデコーダ  $\Psi$  に送信する．本稿では， $\theta[k]$  を送信する通信路にビットレート制約が存在する場合を考える．このビットレート制約に対処するためには，送信ベクトル  $\theta[k]$  をなるべく小さいデータ量に圧縮してから送信するのが望ましい．そこで，前節で導入したスパース表現を導入して，各周期  $k = 0, 1, 2, \dots$  において，信号  $u_k$  を表現 (3) のもとでスパースになるように設計することを考える．すなわち，次の量をなるべく小さくする  $u_k$  を設計する．

$$\|u_k\|_0 := \|\theta[k]\|_0$$

以上の準備のもとで，制御問題は以下で定式化される．

**問題 1 (目標値追従問題)** 各周期  $k = 0, 1, 2, \dots$  において  $r_k \in V_M$  となるような目標信号  $r(t)$  が与えられたとき，以下の評価関数を最小化する制御信号  $u_k \in V_M$  を  $k = 0, 1, 2, \dots$  について求めよ．

$$J(u_k) := \|Pu_k - r_k\|_2^2 + \mu \|u_k\|_0 \quad (4)$$

ここで， $\mu > 0$  は  $\|Pu_k - r_k\|_2^2$  と  $\|u_k\|_0$  の間のトレードオフを調整する正則化パラメータである．

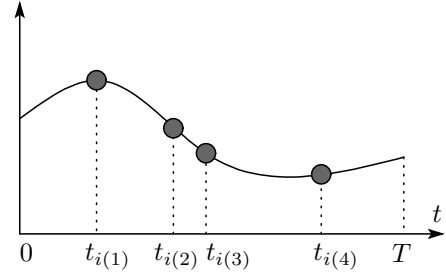


Fig. 3: Random sampling on  $[0, T]$

## 5 圧縮サンプリングによる制御信号のスパース化

本節では，問題 1 を解くために圧縮サンプリングの概念を導入し，スパースな制御信号  $u_k$  を設計する手法を提案する．

### 5.1 ランダムサンプリングによる評価関数の離散化

前節で定式化された問題 1 における評価関数  $J(u_k)$  は連続区間  $[0, T]$  上の関数のノルムによって定義されており，無限次元の問題である．いま， $r_k$  および  $u_k$  は周波数  $\omega_M = 2\pi M/T$  [rad/sec] に帯域制限されていると仮定しているので，Shannon のサンプリング定理<sup>16)</sup> にもとづき，サンプリング周波数  $2\omega_M$  以上で連続時間信号  $r_k, u_k$  および  $y_k$  をサンプリングすれば，評価関数  $J(u_k)$  は有限次元ベクトルの最適化に帰着する．しかし， $M$  が非常に大きい場合，その計算時間は膨大となり，大きな時間遅れが生じる．フィードバック制御系では，大きな時間遅れは不安定化や性能の大幅な劣化の要因となるので，そのような膨大な計算を各周期で行うことは難しい．本稿では，圧縮サンプリングの概念<sup>4, 5, 7)</sup> を導入し，ランダムサンプリングによる最適化計算の大幅な簡略化を提案する．ここで，ランダムサンプリングは，区間  $[0, T]$  を Nyquist レート  $f_M := 2M/T$  [Hz] で等間隔に分割し，得られたサンプル点  $t_n := (n-1)/f_M, n = 1, 2, \dots, 2M+1 =: N$  から  $K$  個のサンプル点 ( $K < N$  とする) をランダムに選ぶことによってモデル化する．

まず，次のランダム行列  $U$  を定義する．

$$U = \begin{bmatrix} e_{i(1)} \\ e_{i(2)} \\ \vdots \\ e_{i(K)} \end{bmatrix} \in \{0, 1\}^{K \times N},$$

ここで  $i(1) < i(2) < \dots < i(K)$  は  $\{1, 2, \dots, N\}$  上の一様分布に従う離散確率変数であり，

$$e_i := [0, \dots, 0, \overset{i}{\underset{\vee}{1}}, 0, \dots, 0], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

である．離散確率変数  $i(1), i(2), \dots, i(K)$  を用いて，ランダムサンプリング点を

$$t_{i(l)} := i(l)h, \quad h := \frac{T}{N-1}, \quad l = 1, 2, \dots, K < N$$

で定める．ランダムサンプリングの例を Fig. 3 に示す．

次に第  $k$  周期における制御対象  $P$  の出力  $y_k$  のランダムサンプリングを考える．(3) で定義される制御信号

$u_k \in V_M$  に対する出力  $y_k$  のサンプル値  $y_k(t_n)$  は

$$y_k(t_n) = \mathbf{c}^\top \exp(t_n A) \mathbf{x}_0 + \sum_{m=-M}^M \theta_m \langle \phi_n, \psi_m \rangle, \quad (5)$$

で与えられる．ここで，

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \mathbf{c}^\top \exp[(t_n - t)A] \mathbf{b}, & t \in [0, t_n], \\ 0, & t \in (t_n, T] \end{cases}$$

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle := \int_0^T \phi_n(t) \psi_m(t) dt$$

である．サンプル値  $y_k(t_{i(1)}), \dots, y_k(t_{i(K)})$  に対して，ベクトル  $\mathbf{y}[k]$  を

$$\mathbf{y}[k] := [y_k(t_{i(1)}), \dots, y_k(t_{i(K)})]^\top \in \mathbb{R}^K$$

と定義する．このとき，(5) を用いれば関係式

$$\mathbf{y}[k] = UG\boldsymbol{\theta}[k] + UH\mathbf{x}[k]$$

が成り立つ．ここで，

$$G := \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \psi_{-M} \rangle & \dots & \langle \phi_1, \psi_M \rangle \\ \langle \phi_2, \psi_{-M} \rangle & \dots & \langle \phi_2, \psi_M \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_N, \psi_{-M} \rangle & \dots & \langle \phi_N, \psi_M \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (6)$$

$$H := \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \exp(t_1 A) \\ \mathbf{c}^\top \exp(t_2 A) \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \exp(t_N A) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times \nu}$$

である．さらに，

$$\mathbf{r}[k] := [r_k(t_1), r_k(t_2), \dots, r_k(t_N)] \in \mathbb{R}^N$$

とおき， $\Phi := UG$ ， $\boldsymbol{\alpha}[k] = U(\mathbf{r}[k] - H\mathbf{x}[k])$  とおくと，ランダムなサンプリング点  $\{t_{i(1)}, t_{i(2)}, \dots, t_{i(K)}\}$  上における追従誤差は

$$\mathbf{y}[k] - \mathbf{r}[k] = \Phi\boldsymbol{\theta}[k] - \boldsymbol{\alpha}[k]$$

となる．これより，問題 1 の評価関数 (4) は， $\boldsymbol{\theta}[k]$  を用いて

$$J_0(\boldsymbol{\theta}[k]) := \|\Phi\boldsymbol{\theta}[k] - \boldsymbol{\alpha}[k]\|_2^2 + \mu\|\boldsymbol{\theta}[k]\|_0$$

と書ける．以上により，評価関数 (4) は離散化され有限次元問題に近似された．

注意 1 目標信号  $r(t)$  が実数値関数の場合，次の三角関数系

$$\psi_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \omega_m t, & m = 1, 2, \dots, M, \\ \frac{1}{\sqrt{T}}, & m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \omega_m t, & m = -M, -M+1, \dots, -1, \end{cases} \quad (7)$$

を用いれば，(6) で与えられる行列  $G$  は実数行列となり，得られる送信ベクトル  $\boldsymbol{\theta}[k]$  も実ベクトルとなる．このとき，制御信号は

$$u_k(t) = \theta_0[k] + \sum_{m=1}^M (\theta_m[k] \cos \omega_m t + \theta_{-m}[k] \sin \omega_m t)$$

で与えられる．

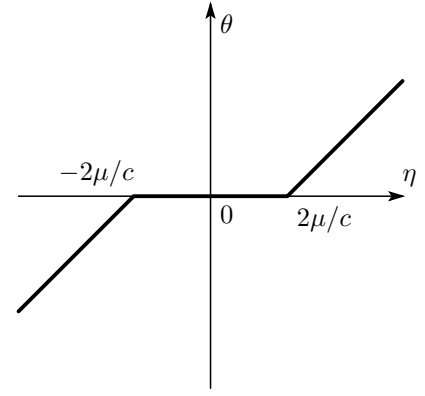


Fig. 4: Nonlinear function  $\theta = \text{sgn}(\eta)(|\eta| - 2\mu/c)_+$

## 5.2 $\ell^1$ - $\ell^2$ 最適化と高速アルゴリズム

第 3 節で述べたように，上記の評価関数の最小化問題は組み合わせ最適化問題であり，ランダムサンプリングにより問題のサイズが小さくなったとしても，なお計算量は膨大となる．したがって，正則化項  $\|\boldsymbol{\theta}[k]\|_0$  を  $\ell^1$  ノルムで緩和した次の  $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化問題を導入する．

$$J_1(\boldsymbol{\theta}[k]) := \|\Phi\boldsymbol{\theta}[k] - \boldsymbol{\alpha}[k]\|_2^2 + \mu\|\boldsymbol{\theta}[k]\|_1. \quad (8)$$

(8) の評価関数は  $\boldsymbol{\theta}[k]$  に関して凸であり，最適解は必ず存在する．また，具体的に最適解を求めるために内点法などが従来用いられてきたが，近年，繰り返し縮小法 (iterative shrinkage)<sup>3, 17)</sup> と呼ばれる手法が提案され，これにより高速な数値計算が可能となった．ここでは FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm) と呼ばれる繰り返し縮小法をさらに高速化したアルゴリズム<sup>3)</sup> を採用する．FISTA のアルゴリズムは以下で与えられる<sup>3, 17)</sup>: 初期値  $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^N$ ， $N := 2M + 1$  を与え， $\beta_1 = 1$ ， $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\theta}_0$  とする．定数  $c$  を

$$c > \|\Phi\|^2 = \sigma_{\max}(\Phi)^2$$

となるように選ぶ．次を繰り返す:

$$\boldsymbol{\theta}_j = \mathcal{S}_{2\mu/c} \left( \frac{1}{c} \Phi^\top (\boldsymbol{\alpha}[k] - \Phi\boldsymbol{\eta}_j) + \boldsymbol{\eta}_j \right),$$

$$\beta_{j+1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\beta_j^2} \right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \frac{\beta_j - 1}{\beta_{j+1}} (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

関数  $\mathcal{S}_{2\mu/c}$  は，ベクトル  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_N]^\top$  に対して

$$\mathcal{S}_{2\mu/c}(\boldsymbol{\eta}) := \begin{bmatrix} \text{sgn}(\eta_1)(|\eta_1| - 2\mu/c)_+ \\ \vdots \\ \text{sgn}(\eta_N)(|\eta_N| - 2\mu/c)_+ \end{bmatrix}$$

で定義される非線形関数である．ただし，複素数  $z$  に対して  $\text{sgn}(z) := \exp(j\angle z)$ ，実数  $a$  に対して  $(a)_+ := \max(a, 0)$  である．関数  $\mathcal{S}_{2\mu/c}$  の各要素に対する非線形関数  $\text{sgn}(\eta)(|\eta| - 2\mu/c)$  の入出力関係を Fig. 4 に示す．条件  $c > \|\Phi\|^2$  が成り立つような  $c > 0$  を選べば，上のアルゴリズムは任意の行列  $\Phi$  とベクトル  $\boldsymbol{\alpha}[k]$  に対

して収束し、 $\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j$  は (8) の  $\ell^1$ - $\ell^2$  評価関数を最小化する最適解に一致する<sup>3)</sup>。さらに、最適解への収束の早さは最悪評価で  $O(1/j^2)$  であることも知られている<sup>3)</sup>。上記のアルゴリズムは、計算機に容易に実装が可能であり、収束も早いことから、リアルタイムでスパースな送信ベクトル  $\theta[k]$  を得ることが可能である。

## 6 数値例

本節では、具体的な数値例によって提案手法の有効性を示す。制御対象  $P$  の状態空間表現 (1) における行列を次で定める。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & -\alpha - \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ただし、 $\alpha = 5$ ,  $\beta = 10$  とする。この制御対象の伝達関数  $\hat{P}(s)$  は

$$\hat{P}(s) = \frac{s - \alpha}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

で与えられる。制御対象の初期値は  $x(0) = \mathbf{0}$  とする。制御周期を  $T = 2\pi$  とし、Fourier 基底  $\{\psi_m\}$  の数、すなわち送信ベクトル  $\theta[k]$  のサイズを  $N = 2M + 1 = 101$  ( $M = 50$ ) とする。目標信号  $r(t)$  を

$$r(t) = \sin(10t) + \cos(5t)$$

とする。これは周期  $T = 2\pi$  の周期関数であり、 $r_0 = r_1 = r_2 = \dots$  となる。この目標信号を (7) で与えられる三角関数系  $\{\psi_m\}$  で展開したときの非ゼロの係数の数は 4 となり、目標信号は  $\{\psi_m\}$  による展開のもとでスパースであることがわかる。ランダムサンプリングにおける最も細かいサンプリング幅は、 $h = T/(N-1) = 2\pi/100$  となる。ランダムサンプリングの個数を  $K = 33$  とする。(8) の  $\ell^1$ - $\ell^2$  評価関数を最小化するベクトルを求めるための FISTA の繰り返し回数を 10 とする。また、制御周期を  $k = 0, 1, \dots, 100$  と合計 101 回繰り返す。

まず、 $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化の評価関数 (8) において、正則化パラメータ  $\mu$  を変化させて最適ベクトル  $\theta[k]$  および制御信号  $u_k$  を求め、その制御信号を用いたときの追従誤差  $e = y - r$  の RMS (Root Mean Square)

$$\text{RMS}(e) := \sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} |e(t)|^2 dt}, \quad T_f = T \times 101$$

および送信ベクトル  $\{\theta[k]\}_{k=0}^{100}$  の各周期におけるスパースさの平均値、すなわち

$$\|\theta\|_0 := \frac{1}{101} \sum_{k=0}^{100} \|\theta[k]\|_0$$

を求めたものを Fig. 5 に示す。比較のため、各周期  $k$  において次の評価関数

$$J_2(u_k) := \|Pu_k - r_k\|_2^2 + \mu_2 \|u_k\|_2^2$$

を最小化する  $L^2$  最適制御問題を考える。これは制御信号  $u_k$  に対して、そのエネルギーを制限する最適制御問題であり、従来よりよく用いられる指標である。制御

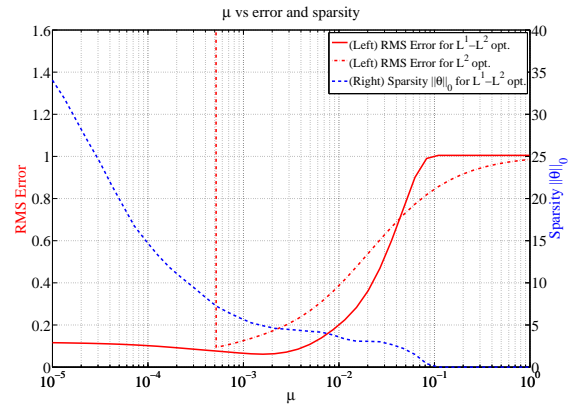


Fig. 5: Regularization parameter versus RMS tracking error and average sparsity

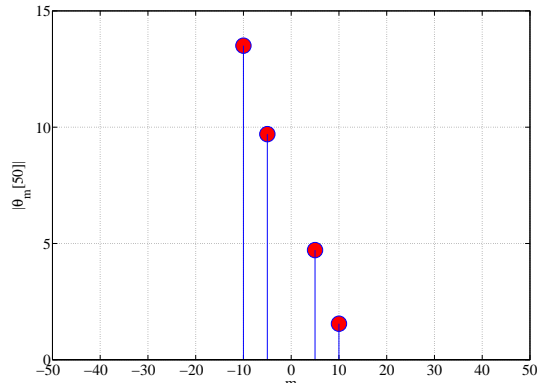


Fig. 6: The absolute values of the nonzero coefficients of  $\theta[50]$  for  $\ell^1$ - $\ell^2$  optimization

信号  $u_k$  に対して帯域制限された Fourier 展開 (3) を仮定すると、その最適係数  $\theta_2[k]$  は

$$\theta_2[k] = (\mu_2 I + G^T G)^{-1} G^T (r_0 - Hx[k]) \quad (9)$$

で与えられる。正則化パラメータ  $\mu_2$  を変化させ、(9) にもとづき最適制御入力  $u_k$  を求め、追従誤差  $e = y - r$  の RMS を計算したものを Fig. 5 に示す。なお、 $L^2$  最適制御では、非ゼロ要素の個数  $\|\theta_2[k]\|_0$  は常に最大値  $N = 101$  をとる。すなわち、 $L^2$  最適制御信号はスパースとはならないことがわかる。また、 $L^2$  最適制御の場合、 $\mu_2 < 0.0005$  でフィードバック系は不安定となった。

以上の計算結果より、 $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化では  $\mu \approx 0.002$ 、 $L^2$  最適制御では  $\mu_2 \approx 0.00055$  のとき、制御性能が最も良いことがわかる。次にこれらのパラメータのもとでの比較を行う。まず、 $\mu = 0.002$  として  $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化により送信ベクトル  $\theta[k]$  を生成し、フィードバック制御を行う。Fig. 6 に  $k = 50$  のときのベクトル  $\theta[50]$  の非ゼロ要素を図示する。101 個の要素のうち 4 個だけが非ゼロであり、非常にスパースなベクトルが得られていることがわかる。各周期  $k$  において、追従誤差  $e_k := r_k - y_k$  の  $L^2[0, T]$  ノルム

$$\|e_k\|_2 := \sqrt{\int_0^T |e_k(t)|^2 dt}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 100$$

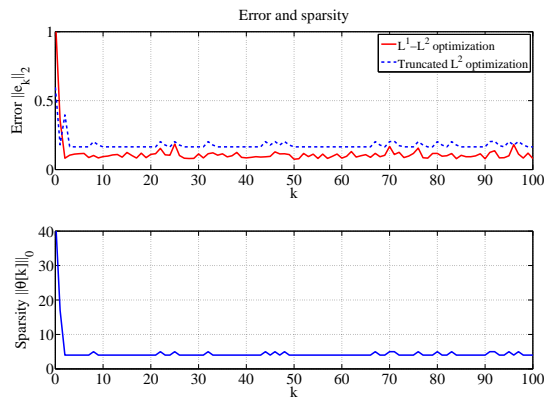


Fig. 7: Error and sparsity

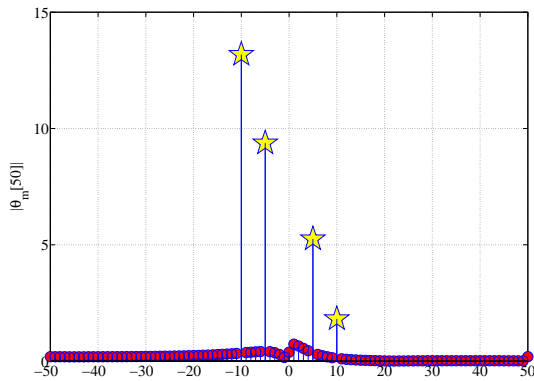


Fig. 8: The absolute values of the nonzero coefficients of  $\theta_2[50]$  for  $\ell^2$  optimization; the stars are the 4 elements of the truncated vector

を求めたものを Fig. 7 の上図に示す。また各周期  $k$  における送信ベクトルのスパースさ  $\|\theta[k]\|_0$  を求めたものを Fig. 7 の下図に示す。次に  $\mu_2 = 0.00055$  として、ベクトル  $\theta_2[k]$  を (9) の公式より求め、 $L^2$  最適制御信号を求める。周期  $k = 50$  のときの  $\theta_2[50]$  の非ゼロ要素の絶対値を Fig. 8 に示す。Fig. 6 の  $\theta[50]$  と異なり、 $\theta_2[50]$  はすべての要素が非ゼロである。提案法との比較を行うため、Fig. 7 の下図で与えられる  $\|\theta[k]\|_0$  のプロファイルを使い、 $\theta_2[k]$  の要素のうち絶対値が大きいものから  $\|\theta[k]\|_0$  個を選び、それ以外の要素をすべて 0 とおいたベクトルを用いて、制御信号を生成する。例えば  $k = 50$  のときは、Fig. 8 で示されるように、 $\|\theta[50]\|_0 = 4$  個の要素だけを残し、それ以外の要素をすべて 0 とおいたベクトルを用いる。これにより、同じデータ量での通信を行うという設定のもとで、提案法と従来法との制御性能を比較することができる。従来法の追従誤差を Fig. 7 に示す。これより、同じ送信ベクトルのデータ量にもかかわらず、提案手法のほうが従来法よりも誤差が小さいことがわかる。

## 7 おわりに

本稿では、ネットワーク化制御系に圧縮サンプリングの手法を導入し、送信信号のスパース表現を用いることで、通信路のビットレート制約に対処する新しい方法を提案した。制御問題は  $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化問題として

定式化される。この最適解は、FISTA と呼ばれる高速アルゴリズムを用いて高速に求めることができる。また、数値例により、送信信号のエネルギーを制限する従来法に対する提案手法の有効性を示した。今後の課題としては、 $\ell^1$ - $\ell^2$  最適化を用いた送信信号のスパース表現のもとでのフィードバック系の安定性解析が挙げられる。

## 参考文献

- 1) 芦野, “圧縮センシングの基礎とその研究動向,” システム/制御/情報, vol.55, no.3, pp.88–93, Mar. 2011.
- 2) S. Bhattacharya and T. Başar, “Sparsity based feedback design: a new paradigm in opportunistic sensing,” Proc. of American Control Conference, pp.3704–3709, Jul. 2011.
- 3) A. Beck and M. Teboulle, “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems,” *SIAM J. Imaging Sciences*, vol.2, no.1, pp.183–202, Jan. 2009.
- 4) E.J. Candes, “Compressive sampling,” *Proc. International Congress of Mathematicians*, vol.3, pp.1433–1452, Aug. 2006.
- 5) E.J. Candes and M.B. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.25, no.2, pp.21–30, Mar. 2008.
- 6) I. Daubechies, M. DeFrise, and C. De-Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” *Commun. Pure Appl. Math.*, vol.57, no.11, pp.1413–1457, Aug. 2004.
- 7) D.L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol.52, no.4, pp.1289–1306, Apr. 2006.
- 8) M. Elad, *Sparse and Redundant Representations*, Springer, 2010.
- 9) M. Elad and M. Aharon, “Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol.15, no.12, pp.3736–3745, Dec. 2006.
- 10) 石井, “ネットワーク化制御: 通信がもたらす制御の新展開,” 計測と制御, vol.47, no.8, pp.627–636, Aug. 2008.
- 11) 松島, 林, E.D. Carvalho, P. Popovski, 酒井, “L1 ノルム最小化を用いた部分空間法によるブラインドスパース通信路推定,” 信学技報, RCS2010-256, vol.110, no.433, pp.49–54, Mar. 2011.
- 12) T. Matsuda, M. Nagahara, and K. Hayashi, “Link quality classifier with compressed sensing based on  $\ell_1$ - $\ell_2$  optimization,” to appear in *IEEE Communications Letters*.
- 13) M. Nagahara and D.E. Quevedo, “Sparse representations for packetized predictive networked control,” *Proc. IFAC 18th World Congress*, pp. 84–89, Aug. 2011.
- 14) M. Nagahara, D. E. Quevedo, J. Østergaard, T. Matsuda, and K. Hayashi, “Sparse command generator for remote control, to be presented at 9th IEEE International Conf. Control and Automation, Dec. 2011.
- 15) 田中, “圧縮センシングの数理,” *IEICE Fundamentals Review*, vol.4, no.1, pp.39–47, Jul. 2010.
- 16) M. Unser, “Sampling — 50 years after Shannon,” *Proc. of the IEEE*, vol.88, no.4, pp.569–587, Apr. 2000.
- 17) M. Zibulevsky and M. Elad, “L1-L2 optimization in signal and image processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.27, pp.76–88, May 2010.