A-4-24

H^∞ 最適化による因果的 B-Spline 補間

Causal B-Spline Interpolation via H^∞ Optimization

永原正章 [1]　　山本裕 [2]
Masaaki Nagahara　　Yutaka Yamamoto

京都大学情報学研究科 [1]
Graduate School of Informatics, Kyoto University,
nagahara@i.kyoto-u.ac.jp

京都大学情報学研究科 [2]
Graduate School of Informatics, Kyoto University,
yy@i.kyoto-u.ac.jp

1　まえがき

B-Spline による補間は特に画像処理においてよく用いられている．しかし，その補間システムは非因果的なフィルタを用いて構成されるため，リアルタイムの音声処理等において使用することは難しい．そこで本研究では，H^∞ 最適化手法を用いて因果的な B-Spline 補間システムを設計することを提案する．

2　B-Spline 補間

連続時間信号 $x(t) \in S_1^n$, $t \in \mathbb{R}$ を考える．ここで S_1^n は次数 n の多項式 Spline の空間であり，$S_1^n = \left\{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\phi(t-k), t \in \mathbb{R}, c \in \ell^2\right\}$ で定義される [1]．ただし，$\phi(t)$ は n 次の 対称 B-Spline $\phi(t) = (\underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \cdots * \beta^0}_{n+1})(t)$,

$$\beta^0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を表す．この連続時間信号 $x(t)$ をサンプリング周期 $T = 1/L$, $L \in \mathbb{N}$ でサンプリングした信号を $x_L(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ とおくと，$x_L(k) = (\{(\uparrow L)c\} * \phi_L)(k)$, $\phi_L(k) = \phi(k/L)$ となり，B-Spline を用いた信号補間は，図 1 のシステムで構成される．ここで ψ は $\psi * \phi = I$ を満たすシステムである．

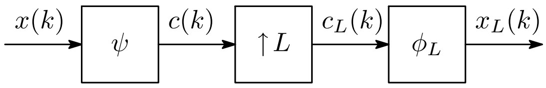

図 1　B-Spline 補間

3　因果的 B-Spline 補間

基底関数 $\phi(t)$ はコンパクト台を持つため，そのサンプリング $\phi(k)$ および $\phi_L(k)$ は FIR フィルタで表現される．例えば $n = 3$ の Cubic Spline の場合，$\phi(z) = (1/6)z^{-1} + (2/3)z^{-2} + (1/6)z^{-3}$ である．しかし，この逆システム $\psi = \phi^{-1}$ は $\psi(z) = 6z/(1 + 4z^{-1} + z^{-2})$ となり，極の一つが単位円外に存在し不安定となる．そこで $\psi(z)$ を安定な伝達関数と反安定な伝達関数に分解することにより，非因果的な IIR フィルタとして実現する手法がよく知られている [2]．画像処理への応用では因果性が必要でないので，非因果的なフィルタでもかまわないが，音声処理や計測などでリアルタイム処理が必要な場合，非因果的なフィルタを用いることはできない．

そこで，本研究では，因果的なフィルタを設計することを考え，$\psi * \phi = I$ を近似的に満たす因果的なフィルタ ψ を求める．すなわち，問題を次のように定式化する．

問題 1　伝達関数 $\phi(z)$ および遅れステップ d が与えられたとき，評価関数 $J(\psi) = \|\psi(z)\phi(z) - z^{-d}\|_\infty$ を最小化する安定な伝達関数 $\psi(z)$ を見つけよ．

この問題は標準的な H^∞ 最適化問題であり，MATLAB 等の標準的な数値計算ソフトウェアを用いて容易に解を得ることができる．得られる最適なフィルタは一般に IIR 型であるが，FIR 型の最適フィルタも線形行列不等式により求めることが可能である [4]．

4　設計例

Spline の次数を $n = 3$ (Cubic Spline) とし，5 タップの FIR フィルタを H^∞ 最適化により設計する．得られたフィルタは表 1 の通りである．比較のため文献 [3] で提案された窓関数法による近似 FIR フィルタ係数を表 2 に示す．次に誤差システムを $E(z) := \psi(z)\phi(z) - z^{-d}$ ($d = 2$) として，それぞれのフィルタを用いたときの誤差システム $E(z)$ のノルムを表 3 に与える．これより提案手法の有効性がわかる．

表 1　H^∞ 最適フィルタ係数

0.12435540	-0.46410161	1.73205072	-0.46410164	0.12435561

表 2　窓関数法による近似フィルタ係数 [3]

0.06049527	-0.37739071	1.63379087	-0.37739071	0.06049527

表 3　誤差システム $E(z)$ のノルム

	H^∞ optimal	windowed approximation [3]
$\|E\|_\infty$	0.053	0.16
$\|E\|_2$	0.030	0.067

参考文献

[1] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, *IEEE Trans. Signal Processing,* pp. 821–833, 1993.

[2] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, *IEEE Trans. Signal Processing,* pp. 834–848, 1993.

[3] B. Vrcelj and P. P. Vaidyanathan, *IEEE Trans. Image Processing,* pp. 1639–1646, 2001.

[4] Y. Yamamoto, B. D. O. Anderson, M. Nagahara and Y. Koyanagi, *IEEE Signal Processing Letters*, 2003.