

1997年度
卒業論文

値集合の算出に関する研究

神戸大学工学部システム工学科

永原 正章

指導教官 太田 有三

1998年2月23日

値集合の算出に関する研究

永原 正章

要旨

値集合が算出できれば，ロバスト制御系の解析や設計に非常に有用であることが知られている．値集合が計算できるとロバスト安定性の問題は，線形時不変系に対しては完全に解くことができ，さらに非線形系に対しても有効と考えられる安定条件を容易に得ることができる．また，設計パラメータを一種の不確かさを持つパラメータとして扱えば，与えられた仕様を満たす設計パラメータの許容領域を求めることができ，システムの設計にも有用である．

この値集合を効率良く算出するためには，不要な計算を極力抑えることが必要である．そのために値集合の性質を調べることは重要な研究対象である．値集合の推定を求める手法の一つに多角形区間演算がある．多角形区間演算は，伝達関数が完全分解可能である場合，真の値集合にほぼ近い，精度の良い推定を高速に計算できる．しかし，伝達関数が完全分解可能でない場合は，多角形区間演算による値集合の推定は，一般に大きくなることが知られている．これを改良するために，本論文では完全分解可能でない場合を含む，より広いクラスの伝達関数について，その値集合の性質を研究した結果を述べている．

伝達関数が多変数複素関数における正則関数であらわせるならば，値集合の境界は定義域の境界だけから求められることを示し，この結果を用いて，値集合を求める操作が，連続関数 $\phi: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^2$ による超立方体 ($\subset \mathbf{R}^n$) の写像を求める操作に帰着できることを示しめしている．さらに，この写像を求める方法を考察している．

またこれらの方法を，マス・バネ・ダンパ系の特性多項式について，適用した数値例も示している．

記号表

記号	意味
\mathbf{R}	実数体
\mathbf{R}^n	n 次元実数ベクトル空間
\mathbf{C}	複素数体
\mathbf{C}^n	n 次元複素数ベクトル空間
j	虚数単位, $j = \sqrt{-1}$
\mathcal{P}	\mathbf{C} 上の多角形の集合
∂D	多角形 $D \in \mathcal{P}$ の境界
$\text{int}D$	多角形 $D \in \mathcal{P}$ の内部領域
$\text{conv}M$	有限個の点集合 M の凸包
\mathbf{I}^n	n 次元超立方体
\mathbf{v}^T	ベクトル \mathbf{v} の転置ベクトル
\mathbf{z}^*	ベクトル \mathbf{z} の複素共役転置ベクトル
$\text{Re}[z]$	複素数 z の実部
$\text{Im}[z]$	複素数 z の虚部
$\text{rank}\mathbf{J}$	行列 \mathbf{J} の階数

目次

1	緒論	1
2	数学的準備	4
2.1	緒言	4
2.2	多変数複素関数	4
2.3	値集合の境界とヤコビ行列	5
2.4	結言	7
3	値集合の境界	8
3.1	緒言	8
3.2	値集合の境界	8
3.3	値集合の算出方法	9
3.3.1	多変数実数関数への帰着	10
3.3.2	$\partial\mathbf{I}^n$ の写像	11
3.3.3	ヤコビ条件	12
3.4	結言	13
4	例題	14
4.1	緒言	14
4.2	例題	14
4.3	結言	16
5	結論	19
	謝辞	20
	参考文献	21

第 1 章

緒論

近年，ロバスト制御は，制御系の特性の不確かさや経年変化などによる特性の変化を許容する制御として注目を集めている．不確かさを持つ制御系のモデルとしては，1) 周波数応答の不確かさを対象とする場合，2) 伝達関数の係数の不確かさを対象とする場合，3) 状態方程式表現における係数行列の要素の不確かさを対象とする場合など，種々の場合が考えられている．これらの立場の違いは，制御対象に対してどの程度の知識を仮定できるかということに関連しているが，ある程度対象とする系の構造がわかっているとすると，不確かさの原因は，実際の物理パラメータの値の不確かさにある．このような場合，周波数応答を制御対象のモデルとして採用すると，物理パラメータとの関連が欠落するので好ましくない．また，状態方程式表現をモデルとして採用する場合には，1つの物理パラメータが，係数行列の複数箇所に現れること，また，係数行列の1つの要素に複数のパラメータが，かなり複雑な形で（多くの場合，多変数有理関数として）現れること，ということに対してどう対処するのかということが問題となる．例えば，安定性を考える場合に，リアプノフ方程式を用いて考えると，係数行列に対する物理パラメータの関わり方が複雑なため問題が非常に難しくなる傾向にある．一方，ある程度対象を限れば，伝達関数に対する物理パラメータの関わり方は，比較的簡単な場合が少なくない．例えば，抵抗，キャパシタ，インダクタからなる電気回路網では，任意の伝達関数の分母・分子多項式の係数は，それぞれの物理パラメータに関して線形になっている（多重線形である）ことが知られている．したがって，伝達関数の係数の不確かさを対象としたモデルを本論文では用いる．

対象とするシステムの構成がよくわかっていて，不確かさを有しているのはシステムパラメータ \mathbf{q} であり， \mathbf{q} の要素 q_i の属する領域 Q_i がわかっているとすると．システムの特性多項式（または，伝達関数）が $f(s, \mathbf{q})$ で与えられるとき， $\mathbf{V}(f; s_0, \mathbf{Q}) = \{f(s_0, \mathbf{q}) | \mathbf{q} \in \mathbf{Q}\}$ を $s = s_0$ における f の値集合とよび，これが f の真の不確かさを与える．値集合が

計算できると、ロバスト安定性の問題は、線形時不変系に対しては完全に解くことができる。さらに、非線形系に対してもかなり有効と思われる安定条件を容易に得ることができる。また、設計パラメータを一種の不確かさを持つパラメータとして扱えば、与えられた仕様を満たす設計パラメータの許容領域を求めることができ、システムの設計にも有効である。この方法は、設計パラメータの数 n が大きい時は適用が困難であるが、凸計画問題にならない場合にも適用できることと、ある仕様を満たす制御器のパラメータの許容範囲が求まったあとで別の仕様も考慮したい場合に先の計算結果を利用できるという特徴がある。このように値集合は、ロバスト制御系の解析・設計に非常に有用であるが、いかにして値集合またはその推定を計算するかという問題がある。その方法の一つとして、多角形区間演算 [1] がある。

この多角形区間演算は、値集合の精度の良い推定を高速に計算するための道具であり、現在二種類ある。凸多角形上で、和 $+$ 、積 \bullet 、逆集合 $(\bullet)^{-1}$ を定義したものを凸多角形区間演算 (Convex Polygon Interval Arithmetic, CPIA) という。非凸の多角形上で和 \oplus 、積 \odot 、逆集合 $(\bullet)^{\ominus}$ を定義したものを、非凸多角形区間演算 (Non-convex Polygon Interval Arithmetic, NPIA) という。

値集合を求めたい伝達関数もしくは特性多項式において、不確かなパラメータ q_i が一度しか現れないような表現を完全分解可能な表現と呼ぶ。これは、その表現が完全分解可能な木構造分割 (totally decomposable Tree Structure Decomposition, [2]) に対応しているからである。現在のところ、このような完全分解可能な表現に対しては NPIA によって精度の良い値集合の推定を行なうことができる。完全分解可能でない場合は、NPIA による値集合の推定は一般に大きくなる。

本論文では、NPIA における和・積を組み合わせた演算を多変数複素関数として扱う。これは多変数複素関数論の諸定理を利用するためである。多変数複素関数論における開写像の定理を用いれば、値集合の境界は、定義域の境界のみによって決定されることを示すことができる。この開写像定理は多変数複素関数が正則関数であれば成り立ち、完全分解可能でない関数を含んだ、より広いクラスの関数に適用できる。

この結果を用いれば、値集合の境界を求める問題が、連続関数 $\phi: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^2$ による超立方体 $\mathbf{I}^n \subset \mathbf{R}^n$ の写像を求める問題に帰着する。しかし、この関数 ϕ は多変数実関数であり、多変数複素関数での正則関数ではない。したがって開写像の定理を用いることができず、 \mathbf{I}^n の内部の点が値集合の境界に写像される場合がある。

この写像については、写像定理と呼ばれる定理により、値集合の凸包が超立方体

\mathbf{I}^n の 2^n 個の端点の写像から求まることが知られている。しかし、値集合のより正確な推定を行なうためには非凸の部分についても詳しく境界を求めなくてはならない。これについては、ヤコビ行列に関する条件を調べる方法がある。この条件を満たすとき、 \mathbf{I}^n の内部の点が値集合の非凸境界に写像される場合があるのである。

本論文の構成は以下の通りである。第1章では本研究の背景と目的を明らかにしている。第2章では本論文で用いる数学の解説を行なう。第3章では値集合の境界に関する定理を述べ、これを用いて値集合を算出する方法を考察する。第4章では第3章で紹介した定理を実際の問題に適用し、値集合を求める。第5章は結論であり、本研究で得られた成果をまとめている。

第 2 章

数学的準備

2.1 緒言

本章では，本論文で用いる数学の説明を行なう．2.2節では多変数複素関数，とくに正則関数と多重線形関数についての説明を行なう．2.3節では値集合および，その境界，そしてヤコビ行列の説明を行なう．

2.2 多変数複素関数

n 個の複素数 z_1, z_2, \dots, z_n を変数とする関数 $f = f(z_1, z_2, \dots, z_n) : \mathbf{C}^n \mapsto \mathbf{C}^m$ を多変数複素関数という．本論文では $f : \mathbf{C}^n \mapsto \mathbf{C}$ であるような多変数複素関数を考える．1 変数の複素関数のように多変数複素関数にも正則関数が定義される．

定義 2.1 \mathbf{C}^n の開集合 Ω で定義された複素数値関数 $f(\mathbf{z})$ と 1 点 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \Omega$ に対し， \mathbf{a} の近傍 U および定数 $A_j (1 \leq j \leq n)$ ， U での関数 $\epsilon(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ が存在し，任意の $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T \in U$ に対して，

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n A_j (z_j - a_j) + \epsilon(\mathbf{z}; \mathbf{a})$$

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\epsilon(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{|\mathbf{z} - \mathbf{a}|} = 0$$

となるとき，関数 $f(\mathbf{z})$ は点 \mathbf{a} で正則であるという． Ω の全ての点で正則のとき， $f(\mathbf{z})$ は Ω で正則であるという．特に， \mathbf{C}^n の全域で正則な関数を整関数という． ■

この定義により，正則関数は連続関数であり，各変数ごとの 1 変数関数と考えて 1 変数正則関数である．また逆に次の定理，系がある．

補題 2.1 [Osgood の補題][3] 連続関数が各変数ごとに正則であれば，多変数正則関数である． ■

系 2.1 [3] $f(\mathbf{z})$ と $g(\mathbf{z})$ を $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ での正則関数とするととき,

1. $f(\mathbf{z}) + g(\mathbf{z})$ と $f(\mathbf{z}) \cdot g(\mathbf{z})$ は Ω で正則である.
2. $f(\mathbf{z})$ が Ω で零にならなければ $1/f(\mathbf{z})$ も Ω で正則である.
3. $f(\mathbf{z})$ が Ω で実数値関数であるか, または $|f(\mathbf{z})|$ が定数であれば $f(\mathbf{z})$ は定数値関数である.

■

これより, 次のような関数は領域 Ω で正則である.

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \\ (\Omega &= \mathbf{C}^3) \\ f(z_1, z_2, z_3) &= \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + c}{z_1 z_2 z_3 + z_1 + z_2 + z_3 + d} \\ (\Omega &= \mathbf{C}^3 \setminus \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 z_2 z_3 + z_1 + z_2 + z_3 + d = 0\}) \end{aligned}$$

また実数値関数は定数関数でなければ正則でない. たとえば次のような関数は \mathbf{C}^2 の全域で正則でない.

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sqrt{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T \\ f(z_1, z_2) &= \text{Im}[z_1 + z_2] \end{aligned}$$

多重線形関数は次のように定義される.

定義 2.2 変数 z_1, z_2, \dots, z_n の関数 $f(\mathbf{z}) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ を考える. 適当な定数 a_k と添字集合 $I(k) \subseteq [1 \dots n]$, $k \in [1 \dots K]$ が存在して, $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ が,

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{k \in [1 \dots K]} a_k \prod_{i \in I(k)} z_i \quad (2.1)$$

と表されるとき, $f(\mathbf{z})$ は, \mathbf{z} に関して多重線形であるという. ■

2.3 値集合の境界とヤコビ行列

次のような関数を考える.

$$\mathbf{V}(f; s, \mathbf{Q}) = \{f(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^n\} \quad (2.2)$$

$$f(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^l a_i(\mathbf{q}) p_i(s) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T, \quad q_i \in [q_i^-, q_i^+], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$s = s_0 = j\omega_0$ を固定し, 全ての \mathbf{q} を動かした時の複素平面上の f の値域を

$$\mathbf{V}(f; j\omega_0, \mathbf{Q}) = \{f(j\omega_0, \mathbf{q}) | \mathbf{q} \in \mathbf{Q}\} \quad (2.4)$$

とおく. この $\mathbf{V}(f; j\omega_0, \mathbf{Q})$ を値集合と呼ぶ. 以降, $\mathbf{V}(f; j\omega_0, \mathbf{Q})$ を単に \mathbf{V} と書くことにする. \mathbf{V} は一般に有界な閉領域である. その境界を $\partial\mathbf{V}$ であらわす. 境界 $\partial\mathbf{V}$ を求めるには, 変数 \mathbf{q} に関する $f(j\omega_0, \mathbf{q})$ のヤコビ行列を調べる必要がある. このことを次の定理で述べる. 値集合 \mathbf{V} は複素平面上の領域であるが, 次の定理では, これを二次元座標平面上の領域と考える.

定理 2.1 複素平面上の点 $u + jv$ を二次元座標平面上の点 (u, v) に対応させる. すなわち

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\mathbf{q}) \\ v(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}f(j\omega_0, \mathbf{q}) \\ \text{Im}f(j\omega_0, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

と定義する. この関数 $f = [u(\mathbf{q}) \ v(\mathbf{q})]^T$ について, 点 $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{Q}$ におけるヤコビ行列を次のように定義する.

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1} & \frac{\partial u}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial q_n} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1} & \frac{\partial v}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial q_n} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \quad (2.6)$$

このとき, 点 \mathbf{q}_0 が境界 $\partial\mathbf{V}$ 上の点にうつる必要条件是,

1. \mathbf{q}_0 が \mathbf{Q} の境界 $\partial\mathbf{Q}$ 上にあるか,
2. \mathbf{q}_0 が $\text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) < 2$ を満たす点であることである. ■

証明. この証明を示すために, 次の補題 2.2 を紹介する.

補題 2.2 [関数関係の存在定理][5],[6] 変数 q_1, q_2, \dots, q_n の実数関数

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ v(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

が点 $\mathbf{q}_0 = [q_1^0 \ q_2^0 \ \cdots \ q_n^0]^T$ の近傍で連続微分可能とする. このとき, 式 (2.6) で定義したヤコビ行列について,

- (1) $\text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) = 2$ ならば \mathbf{q}_0 の近傍を含む開集合は $\mathbf{r}_0 = (u(\mathbf{q}_0), v(\mathbf{q}_0))$ の近傍を含む開集合にうつる.
- (2) $\text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) = 1$ を満たす点 \mathbf{q}_0 はある曲線 (もしくは点) $g(u(\mathbf{q}_0), v(\mathbf{q}_0)) = 0$ 上にうつる.

(3) $\text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) = 0$ を満たす点 \mathbf{q}_0 はある一点 \mathbf{r}_0 にうつる. ■

この補題 2.2 は, 解析学における陰関数の定理より導かれる ([5],[6]).

定理 2.1 を証明しよう.

ここで連続関数による有界集合の像は有界集合になるという事実 ([5],[6]) は既知とする. 補題 2.2 の条件 (1) を論理数学的に記述すると次のようになる.

$$\forall \mathbf{q}_0 \in \text{int}\mathbf{Q} \text{ かつ } \text{rank}\mathbf{J} = 2 \implies \mathbf{r}_0 = (u(\mathbf{q}_0), v(\mathbf{q}_0)) \in \text{int}\mathbf{V} \quad (2.8)$$

この対偶は次のようにあらわすことができる.

$$r_0 \in \partial\mathbf{V} \implies \exists \mathbf{q}_0 : \mathbf{r}_0 = (u(\mathbf{q}_0), v(\mathbf{q}_0)), \text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) < 2 \text{ もしくは } \mathbf{q}_0 \in \partial\mathbf{Q} \quad (2.9)$$

これは定理 2.1 の命題に他ならない.

[証明終り]

2.4 結言

本章では, 多変数複素関数論から正則関数の定義と性質, 多重線形関数の定義, また実関数におけるヤコビ行列などに関する説明を行なった.

第 3 章

値集合の境界

3.1 緒言

この章では、値集合の境界に関する定理を述べる。この定理は多変数複素関数の正則関数に関する定理（開写像の定理）より導かれる。第 3.2 節でこの定理の紹介および証明を行ない、第 3.3 節でこの定理を用いて値集合を算出する方法を考察する。

3.2 値集合の境界

定理 3.1 複素数 z_1, z_2, \dots, z_n の正則関数 $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を考える。 $z_1 \in D_1, \dots, z_n \in D_n$ とする。ここで D_1, \dots, D_n はコンパクトであるとする。 f の定義域は $\Omega = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbf{C}^n$ となり、 f の値域を \mathcal{V} とおく。 $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ が Ω 上で正則ならば、

1. $f(\text{int}D_1, \text{int}D_2, \dots, \text{int}D_n) \subset \text{int}\mathcal{R}$
2. $f(\text{int}D_{k_1}, \dots, \text{int}D_{k_l}, \partial D_{\bar{k}_1}, \dots, \partial D_{\bar{k}_m}) \subset \text{int}\mathcal{R}$
 $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m, \quad l, m \in \{1, 2, \dots, n-1 \mid l+m=n\}$
3. $\partial\mathcal{V} \subset f(\partial D_1, \partial D_2, \dots, \partial D_n)$

が成り立つ。すなわち、 \mathcal{V} の境界は、定義域の境界 $\partial D_1, \dots, \partial D_n$ により、決定される。 ■

証明. 定理 3.1 を証明するために、次の補題 3.1, 補題 3.2 を示す。

補題 3.1 [7] K をコンパクト（有界な閉集合）とし、 f を K 上の連続関数とすると、 $f(K)$ はコンパクトである。 ■

補題 3.2 [開写像定理] [3] $f(\mathbf{z}) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を \mathbf{C}^n の領域 Ω での正則関数とする。 $f(\mathbf{z})$ が定数関数でなければ、写像 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ は開写像である。すなわち Ω の任意の開領域 U に対して $f(U)$ は \mathbf{C} の開領域である。 ■

まず、補題 3.1 より \mathcal{V} はコンパクトとなる。これをふまえて 1.~3. を証明する。

1. $\mathcal{V}_I \triangleq f(\text{int}\mathcal{D}_1, \text{int}\mathcal{D}_2, \dots, \text{int}\mathcal{D}_n)$ とおく。補題 3.2 より、 \mathcal{V}_I は開領域となる。 $\mathcal{V}_I \subset \mathcal{V}$ であり、 \mathcal{V} はコンパクトであるから、 $\mathcal{V}_I \subset \text{int}\mathcal{V}$ となる。
2. $\mathcal{V}_{k_l, \bar{k}_m} \triangleq f(\text{int}\mathcal{D}_{k_1}, \dots, \text{int}\mathcal{D}_{k_l}, \partial\mathcal{D}_{\bar{k}_1}, \dots, \partial\mathcal{D}_{\bar{k}_m})$ とおく。 $\partial\mathcal{D}_{\bar{k}_1}, \dots, \partial\mathcal{D}_{\bar{k}_m}$ 上の任意の点 $(\hat{z}_{\bar{k}_1}, \dots, \hat{z}_{\bar{k}_m})$ を固定する。次の関数 \hat{f} を考える。

$$\hat{f}(z_{k_1}, \dots, z_{k_l}) = f(z_{k_1}, \dots, z_{k_l}, \hat{z}_{\bar{k}_1}, \dots, \hat{z}_{\bar{k}_m})$$

この関数は $\hat{z}_{\bar{k}_1}, \dots, \hat{z}_{\bar{k}_m}$ を複素定数と考えれば $\mathbf{C}^{n-l} \rightarrow \mathbf{C}$ の (正則) 関数となる。この関数の像を

$$\hat{\mathcal{V}}_{k_l, \bar{k}_m} \triangleq \hat{f}(\text{int}\mathcal{D}_{k_1}, \dots, \text{int}\mathcal{D}_{k_l})$$

とおくと、1. と同様の議論により $\hat{\mathcal{R}}_{k_l, \bar{k}_m} \subset \text{int}\mathcal{V}$ となる。境界上の任意の点に対して $\hat{\mathcal{V}}_{k_l, \bar{k}_m} \subset \text{int}\mathcal{V}$ であるので、 $\mathcal{V}_{k_l, \bar{k}_m} \subset \text{int}\mathcal{V}$ となる。

3. 上記 2. の全ての l, m についての組合せによる f の写像の和集合を $\mathcal{V}_{I,B}$ とおく。すなわち、

$$\mathcal{V}_{I,B} \triangleq \bigcup_{l,m} \mathcal{V}_{k_l, \bar{k}_m}$$

また、各定義域の境界の写像を

$$\mathcal{V}_B \triangleq f(\partial\mathcal{D}_1, \dots, \partial\mathcal{D}_n)$$

とおく。1. と 2. より $\mathcal{V}_I \cup \mathcal{V}_{I,B} \subset \text{int}\mathcal{V}$ となり、また $\text{int}\mathcal{V} \cap \partial\mathcal{V} = \emptyset, \text{int}\mathcal{V} \cup \partial\mathcal{V} = \mathcal{V}, \mathcal{V}_I \cup \mathcal{V}_{I,B} \cup \mathcal{V}_B = \mathcal{V}$ が成り立つ。この集合の包含関係は Fig.3.1 のようになる。縦線の部分が \mathcal{V}_I を、横線の部分が $\mathcal{V}_{I,B}$ を、斜線の部分が \mathcal{V}_B をそれぞれあらわす。これより $\mathcal{V}_B \subset \mathcal{V}, \partial\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_B$ が成り立つことがわかる。

以上より領域 \mathcal{V} の形は定義域の境界により決定されることがわかる。 [証明終り]
上の \mathcal{V} は値集合 \mathbf{V} に他ならない。

3.3 値集合の算出方法

この節では、値集合の境界を求める計算が、 \mathbf{R}^n 内の超立方体の写像を求める問題に帰着することを述べ、値集合の算出方法を考察する。

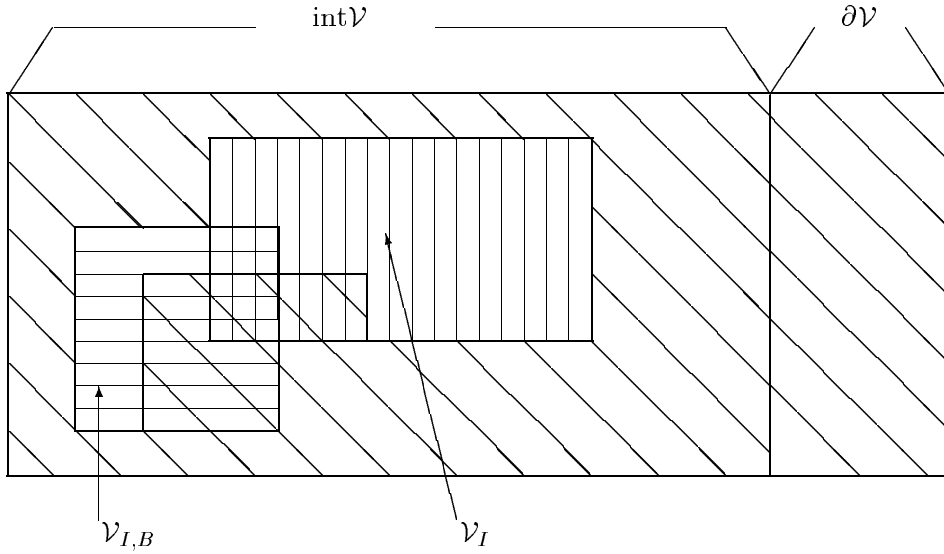


Fig. 3.1: The Venn diagram of $\text{int}\mathcal{V}$, $\partial\mathcal{V}$, \mathcal{V}_I and $\mathcal{V}_{I,B}$.

3.3.1 多変数実数関数への帰着

不確かなパラメータを含む伝達関数が次のような多変数複素正則関数であらわすことが出来たとする.

$$f(\mathbf{z}) = f(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_i \in \mathcal{D}_i \subset \mathbf{C} \quad (3.1)$$

このとき, 定理 3.1 より値集合 \mathbf{V} について

$$\partial\mathbf{V} \subset f(\partial\mathcal{D}_1, \dots, \partial\mathcal{D}_n) \quad (3.2)$$

が成り立つので, \mathcal{D}_i の境界の写像を求めれば, 値集合の境界が求まる. $\partial\mathcal{D}_i$ は閉曲線であるので, 曲線上の点 \bar{z}_i はパラメータ t_i を用いて,

$$\bar{z}_i = \phi_i(t_i) \quad (3.3)$$

とあらわすことが出来る. ここで, $\partial\mathcal{D}_i$ を多角形とする. もし $\partial\mathcal{D}_i$ が曲線である場合は, 許容できる範囲で曲線を多角形近似すればよい. このとき, 多角形上の点を式 (3.3) のように一つの関数であらわすと, 多角形の各端点において関数が微分不可能となり扱いにくい. したがって, それぞれの多角形の 1 辺をとりだして, その辺上で考えていくことにする. 各辺上の点 \bar{z}_i は t_i を実パラメータとして次のようであらわすことが出来る.

$$\bar{z}_i = p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0)t_i \quad (3.4)$$

$$p_i^0, p_i^1 \in \mathbf{C}, \quad t_i \in [0, 1]$$

ここで, p_i^0, p_i^1 は多角形 ∂D_i 上の互いに隣合う端点である. これを式 (3.1) に代入すれば,

$$\begin{aligned} f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) &= f((p_1^1 - p_1^0)t_1, \dots, (p_n^1 - p_n^0)t_n) \\ &\triangleq u(t_1, \dots, t_n) + iv(t_1, \dots, t_n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. ここで, 上の関数を $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^2$ と考えて次のようにあらわす.

$$\phi(t_1, \dots, t_n) = f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \begin{bmatrix} u(t_1, \dots, t_n) \\ v(t_1, \dots, t_n) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

これより, $f(\partial D_1, \dots, \partial D_n)$ を求めることは次の写像を考えることに帰着する.

$$\phi: \mathbf{I}^n \triangleq [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^2 \quad (3.7)$$

この写像を \mathcal{V} とおくと,

$$\mathcal{V} = \phi(\mathbf{I}^n) = \begin{bmatrix} u(\mathbf{I}^n) \\ v(\mathbf{I}^n) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

となる. \mathcal{V} の境界 $\partial \mathcal{V}$ を求めることを考える. 第 2.3 節の定理 2.1 より, $\partial \mathcal{V}$ を求めるには

1. \mathbf{I}^n の境界 $\partial \mathbf{I}^n$ の写像を求める.
 2. \mathbf{I}^n の内部 $\text{int} \mathbf{I}^n$ の点でヤコビ行列の階数が 2 未満である点の写像を求める.
- という 2 つの場合を考える必要がある.

3.3.2 $\partial \mathbf{I}^n$ の写像

超立方体 \mathbf{I}^n の各頂点を V_i ($i = 1 \dots 2^n$), V_i の ϕ による写像を $M_i \triangleq \phi(V_i)$ とおく. この 2^n 個の V_i の集合を V , M_i の集合を M とおく. 頂点 V_{i_1} と頂点 V_{i_2} を結ぶ \mathbf{I}^n の辺を $l(i_1, i_2)$, 頂点 V_{i_1} から \mathbf{I}^n の辺を通して頂点 V_{i_2} へ至る経路で最短のものを頂点経路といい, その距離を $m(i, j)$ とおく. 辺 $l(i_1, i_2)$ の場合は $m(i_1, i_2) = 1$ である. \mathbf{I}^n の一辺の長さは 1 であるので, $m(i, j)$ は頂点経路の辺の本数に一致する. 関数 ϕ が多重線形である場合, 次の 2 つの定理が知られている.

定理 3.2 [写像定理][8] $\mathcal{V} = \phi(\mathbf{I}^n)$ と M の凸包の間には次の関係がある.

$$\mathcal{V} = \phi(\mathbf{I}^n) \subset \text{conv}(M) = \text{conv}(\phi(V)) \quad (3.9)$$

■

定理 3.3 [8] 辺 $l(i_1, i_2)$ は多重線形関数 ϕ によって \mathbf{R}^2 上の線分にうつる. ■

この2つの定理より、辺の写像 $\phi(l(i_1, i_2))$ が $\partial(\text{conv}(M))$ の一边であれば、それは値集合の境界となる。これは、次の方法を用いれば調べられる。すなわち、 M の凸包をとり、その端点を調べる。このとき、となりあう2点 M_i, M_j について $m(i, j) = 1$ であれば、その2点を結ぶ線分は値集合の境界となることがわかる。 $m(i, j) > 1$ であれば、その線分は値集合の境界とはならないことが経験的に知られている。すべての端点について $m(i, j) = 1$ であれば、値集合は $\text{conv}(M)$ であたえられる。 $m(i, j) > 1$ となる i, j が存在する場合はヤコビ条件を考えなければならない。ヤコビ条件を満たす点を見つける方法を次に示す。

3.3.3 ヤコビ条件

ヤコビ行列の階数が2未満である条件をヤコビ条件という。ヤコビ条件を満たす点 $\theta = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]^T \in \mathbf{I}^n$ を求める。ヤコビ行列は

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial u}{\partial t_n} \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial v}{\partial t_n} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

となる。ここでヤコビ条件($\text{rank} \mathbf{J}(\theta) < 2$)は次の条件と等価である。

$$\begin{aligned} \exists i \ (1 \leq i \leq n), \quad \frac{\partial u}{\partial t_i} \neq 0 \text{ かつ } \frac{\partial v}{\partial t_i} \neq 0 \text{ として,} \\ J_j^i(\theta) \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_i} & \frac{\partial u}{\partial t_j} \\ \frac{\partial v}{\partial t_i} & \frac{\partial v}{\partial t_j} \end{vmatrix} = 0 \\ (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.11)$$

すなわち $n-1$ 本の連立方程式を解かなければならない。この方程式を解析的に解くことは一般に難しい。したがって、数値解法的に解くことを考える。その一つの方法としてある点 $\theta_0 \in \mathbf{I}^n$ を初期値としてニュートン法で解を探していく方法がある。このときある変数 t_k を固定して、上の方程式を解くことになるが、次のヤコビ行列

$$D_k(J_j^i) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial J_1^i}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial J_1^i}{\partial t_{k-1}} & \frac{\partial J_1^i}{\partial t_{k+1}} & \dots & \frac{\partial J_1^i}{\partial t_n} \\ \frac{\partial J_2^i}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial J_2^i}{\partial t_{k-1}} & \frac{\partial J_2^i}{\partial t_{k+1}} & \dots & \frac{\partial J_2^i}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial J_n^i}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial J_n^i}{\partial t_{k-1}} & \frac{\partial J_n^i}{\partial t_{k+1}} & \dots & \frac{\partial J_n^i}{\partial t_n} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

が正則でなければならない [10]. この $D(J_j^i)$ が正則であるとするとき, 初期値 $\theta_0 \in \mathbf{I}^n$ に対して, 方程式 (3.11) を満たすある点 θ_1 が求まる. $\theta_1 \in \mathbf{I}^n$ のとき, この θ_1 が値集合の境界にくる可能性がある. 初期値 θ_0 を \mathbf{I}^n 上で十分多くとれば方程式 (3.11) を満たす点 θ の集合が求まる. この集合の写像が値集合の境界にうつる可能性がある. ここでは, ある k に対して $D_k(J_j^i)$ が正則となるような $t_k \in \mathbf{I}^n$ が常に存在すると仮定して議論を進める.

陰関数の定理 ([5],[6]) より, ある k に対して $|D_k(J_j^i)| \neq 0$ ならば, 方程式 (3.11) を満たすある点 θ_1 の近傍で方程式 (3.11) が $t_i (i \neq k)$ について解ける. すなわち, θ_1 の近傍で方程式 (3.11) を満たす解曲線が存在することが示される. \mathbf{I}^n のすべての点において $\exists k : |D_k(J_j^i)| \neq 0$ となる t_k が存在するので, 方程式 (3.11) の解曲線が領域 $\text{int}\mathbf{I}^n$ において途切れることはないと考えられる. また, ϕ が θ に関する多重線形関数であれば, 解曲線が閉曲線となることは考えにくい. これにより, 解曲線は \mathbf{I}^n のファセットすなわち $\partial\mathbf{I}^n$ 上のある $(n-1)$ 次元超立方体 \mathbf{I}_A^{n-1} から \mathbf{I}_B^{n-1} に到ると考えられる. したがって, ニュートン法の初期値 θ_0 はファセット上にとれば良いことがわかる.

3.4 結言

本章では, 第1章で多変数複素関数論における開写像の定理を用いて, 値集合の性質に関する定理を紹介し, 第2章でその定理を用いて値集合を求める方法を示した. 3.3.2および3.3.3で述べた方法は, まだ証明されていない命題を含み, 今後の課題である.

第 4 章

例題

4.1 緒言

本章では，第 3 章で述べたことを実際の問題に適用し，値集合を求め，確認する．

4.2 例題

Fig.4.1 のシステムを考える．

f を入力， $x_b = y$ を出力として伝達関数 $G(s)$ を求めると，

$$G(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\{M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2\} \{M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + K_2 + K_3\} - (B_2 s + K_2)^2} \quad (4.1)$$

ここで，

$$\begin{aligned} z_1 &= M_1 s_0^2 + B_1 s_0 + K_1 \\ z_2 &= M_2 s_0^2 + B_3 s_0 + K_3 \\ z_3 &= B_2 s_0 + K_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

とおく．変数 s は $s_0 = j\omega_0$ に固定する．この z_1, z_2, z_3 を用いて，このシステムの特
性方程式（伝達関数の分母）をまとめると，

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (z_1 + z_3)(z_2 + z_3) - z_3^2 \\ &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる．式 (4.3) より f は z_1, z_2, z_3 に関する多重線形関数で，明らかに正則関数である．
この特性多項式の値集合 \mathbf{V} を求めてみよう．この問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \\ z_i &\in \mathcal{D}_i \subset \mathbf{C}, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

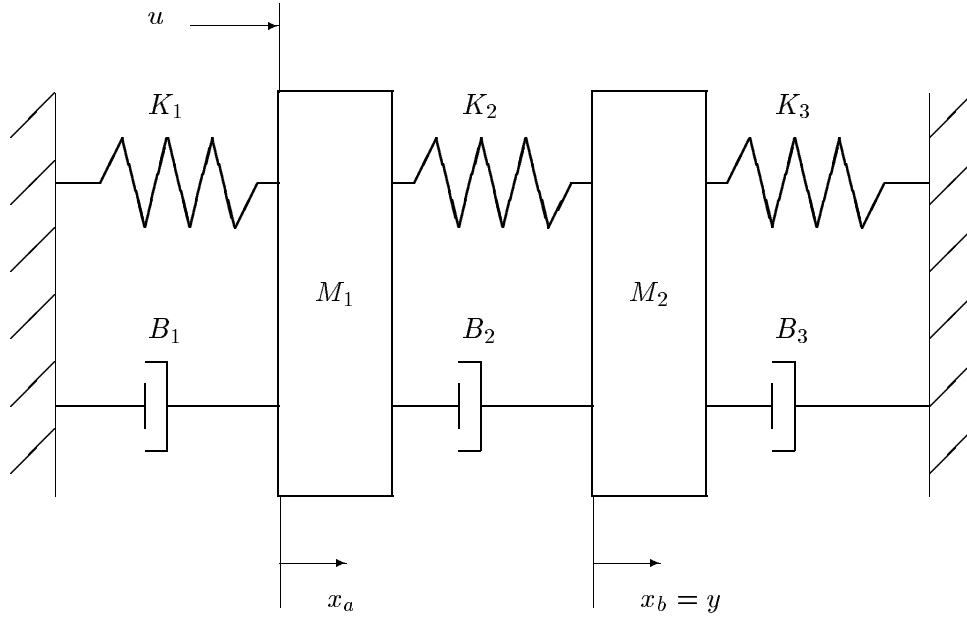


Fig. 4.1: Schematic representation of a mechanical system

$$\mathbf{V} = f(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) \subset \mathbf{C}$$

$$f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}$$

このシステムの係数 $M_1, M_2, B_1, B_2, B_3, K_1, K_2, K_3$ は不確かであり、ある区間上の点をとるものとする。式 (4.2) より、 z_1, z_2, z_3 の多項式はカリトノフ型の多項式であるので、それぞれ矩形領域となる [11]。この矩形領域を $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ とおく。この値集合の領域は、矩形領域の境界の写像から求まることを実際に確かめてみる。まず $s_0, K_1, K_2, K_3, B_1, B_2, B_3, M_1, M_2$ の区間を次のように設定する。

$$s_0 = 1.0j$$

$$K_1 \in [0.995, 1.005]$$

$$K_2 \in [1.995, 2.005]$$

$$K_3 \in [0.995, 1.005]$$

$$B_1 \in [0.9, 1.1]$$

$$B_2 \in [1.1, 1.2]$$

$$B_3 \in [0.9, 1.1]$$

$$M_1 \in [0.9995, 1.0005]$$

$$M_2 \in [1.9995, 2.0005]$$

これより, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ の矩形は次のように計算される.

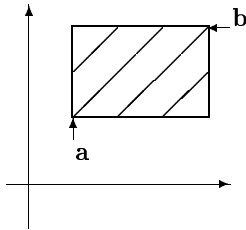


Fig. 4.2: $\text{rect}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$\mathcal{D}_1 = \text{rect}[(-0.0055, 0.9), (0.0055, 1.1)]$$

$$\mathcal{D}_2 = \text{rect}[(-1.0055, 0.9), (-0.9945, 1.1)]$$

$$\mathcal{D}_3 = \text{rect}[(1.995, 1.1), (2.005, 1.2)]$$

ここで $\text{rect}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ は 2 頂点 \mathbf{a}, \mathbf{b} で作られる, 縦軸と横軸に平行な長方形領域とする. Fig.4.2参照. この長方形領域により値集合 \mathbf{V} を求める. Fig.4.3はそれぞれの長方形領域の端点の集合 M とその凸包 $\text{conv}(M)$ を描いたものである. それぞれの点の対応を見ると, 全ての点について $m(i, j) = 1$ となり, この凸包は真の値集合に一致する. Fig.4.4は長方形領域の境界をグリiddingして値集合を求めた. 比較のため Fig.4.3で描いた凸包 $\text{conv}(M)$ を重ねた. Fig.4.5はシステムのパラメータを全てグリiddingして値集合を描いたものである. これも比較のため Fig.4.3で描いた凸包 $\text{conv}(M)$ を重ねた. これらの図を見れば, 定義域の境界の写像で値集合の推定が求まること, さらにこの例では定義域の端点の写像を調べれば十分であることなどがわかる.

ただ, この例題の方法はグリiddingを用いており, 図からわかるように, 写像された点が一様に分布しない. これは, この例題だけでなく一般の場合にも言えることである. これは, グリiddingによる値集合の推定が難しいことを示している.

4.3 結言

本章では, 第3の確認のため, 実際の問題について特性多項式の値集合を求めた. この例では, 値集合は凸多角形であるので, 非凸の部分を考慮する必要はなかった.

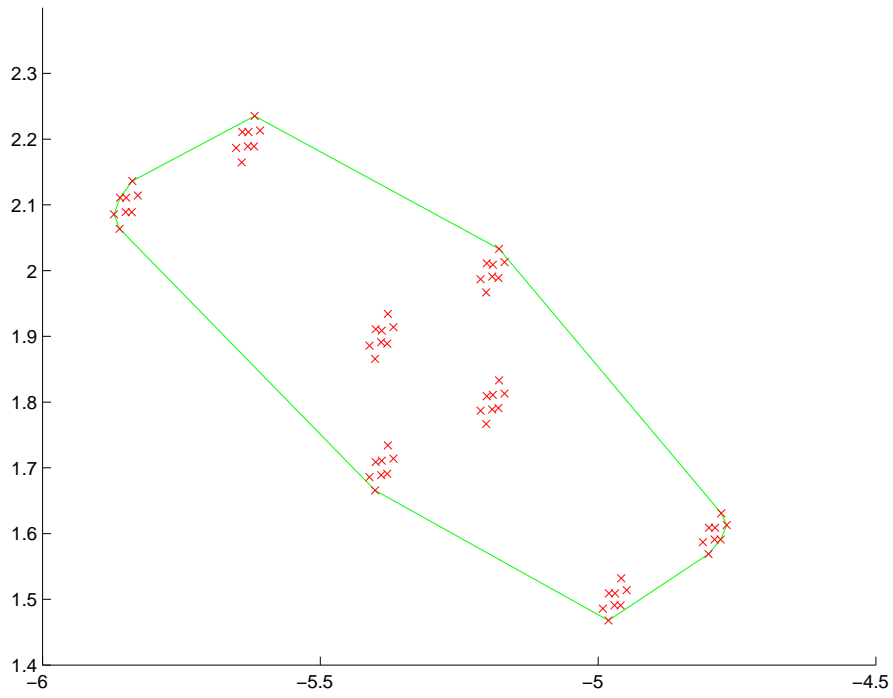


Fig. 4.3: M and $\text{conv}(M)$.

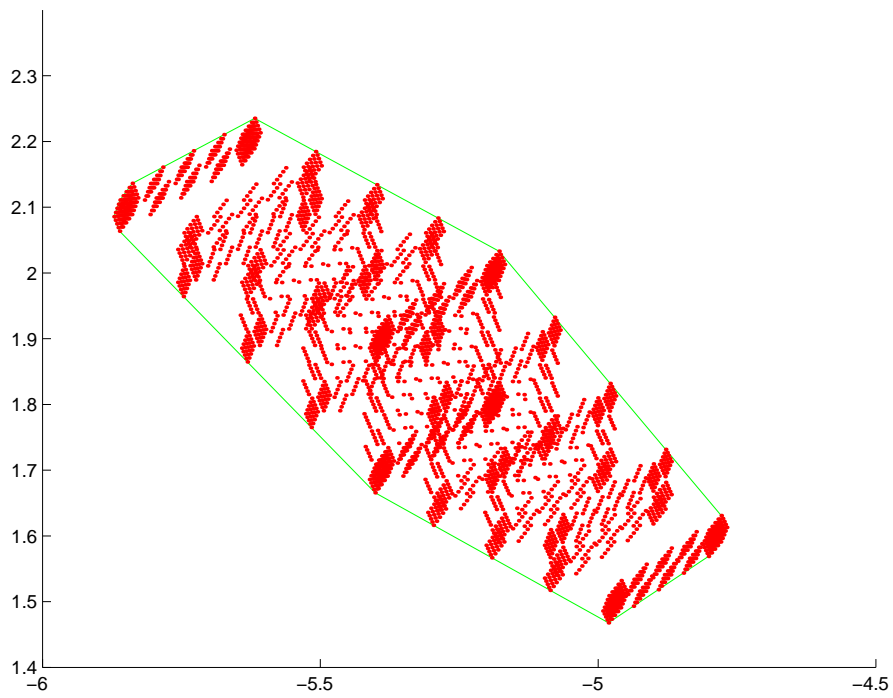


Fig. 4.4: The image of f obtained by gridding each $\partial\mathcal{D}_i$ and $\text{conv}(M)$.

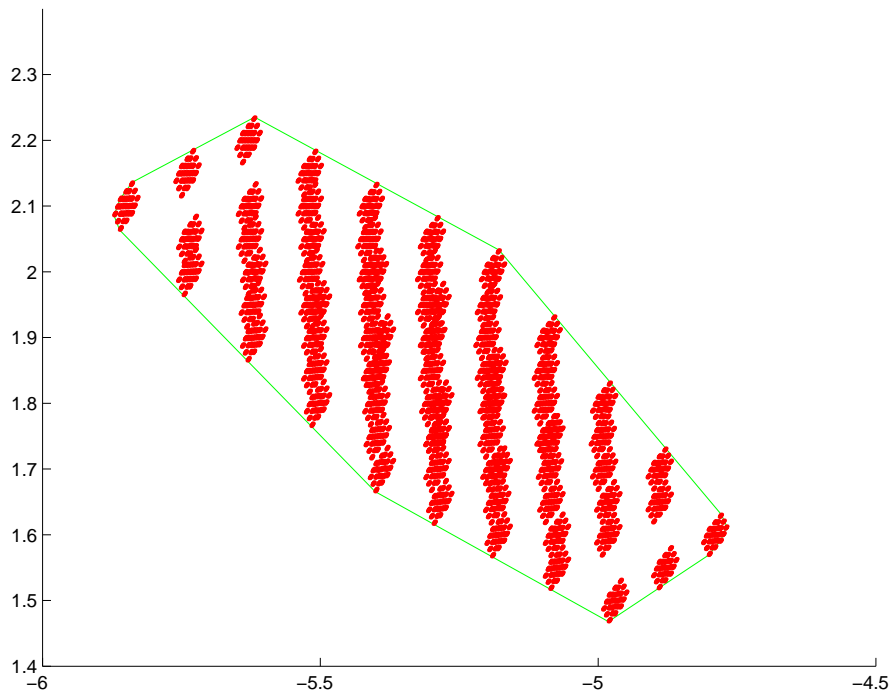


Fig. 4.5: The image of f obtained by gridding all of the system parameters and $\text{conv}(M)$.

第 5 章

結論

本論文では、値集合の性質について述べ、値集合算出の一方法を示し、それを用いて実際に値集合を求めてみた。値集合の境界が定義域の領域の境界から求まるという性質より、値集合を求める問題が超立方体の写像を求める問題に帰着した。

この超立方体の写像は $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^2$ の実関数であらわされ、ヤコビ条件を考慮しなければならない。ヤコビ条件を満たす点は、値集合の境界に写像される可能性があるが、実際に値集合を求めてみると、その境界はほとんどが立方体の辺の写像であることが経験的にわかっている。ニュートン法でヤコビ条件を調べるとき、その初期値は超立方体のファセット上にとることを本論文で述べたが、超立方体 \mathbf{I}^n の全てのファセット ($2n$ 個ある) についてニュートン法を実行することは、必ずしも必要でないと考えられる。本論文で述べた写像定理 3.2 や定理 3.3 を応用して、ニュートン法を実行すべきファセットを決定できるかもしれない。さらには、その領域をある 2 次元平面の領域にまでさげることが出来れば、値集合の算出は現在の方法に比べ、非常に効率の良いものになるであろう。

謝 辞

本論文を締めくくるにあたり、日頃より懇切に御指導いただき、本研究を進める上で適切な御助言を賜りました神戸大学工学部太田有三教授に深く感謝の意を表します。

また、本研究の遂行に当たって多くの御助言を賜りました藤崎康正助教授、ならびに大西和夫技官に心より感謝申し上げます。

さらに、修士の先輩方々、特に垣内英利氏、綿引昌洋氏の両氏をはじめ、本研究に御協力頂いたすべての皆様に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] 太田有三, "多角形区間演算を用いたロバスト制御系の解析と設計", 計測と制御, Vol.35, No.10 (1996)
- [2] B.R.Barmish, J.Ackermann, H.Hu, "The Tree Structured Decomposition: A New Approach to Robust Stability Analysis", *Proc. Conf. on Information Sciences and Systems, Princeton University* (1990)
- [3] 樋口禎一, 吉永悦男, 渡辺公夫, "多変数複素解析入門", 森北出版, pp.1 - 5, 1980
- [4] J.Ackermann, et al., "Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters", Springer-Verlag, Berlin, pp.123 - 154, (1993)
- [5] 高木貞治, "解析概論: 改訂第三版", 岩波書店, pp.294 - pp.324, (1983)
- [6] 溝畑茂, "数学解析(下)", 朝倉書店, pp.365-pp.436 (1973)
- [7] Lars V. Ahlfors, "COMPLEX ANALYSIS", McGraw-Hill, pp.49 - 99, 1979
- [8] Raymond R.E.de Gaston, Michael G.Safonov, "Exact Calculation of the Multiloop Stability Margin", *IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.33, No.2, February*, (1988)
- [9] 磯貝晃, "多角形区間演算を用いた不確かさを含む制御形の設計に関する研究", 神戸大学大学院工学研究科修士論文, (1994)
- [10] D.G. モースント, G.S. デュリス著, 村上温夫訳, "初等数値解析", 共立全書, pp.54 - 63, (1975)
- [11] 木村英紀, 藤井隆雄, 森武宏, "ロバスト制御", コロナ社, pp.157 - 176, 1994