

サンプル値制御理論による最適ウェーブレット展開

加 嶋 健 司*・永 原 正 章*・山 本 裕*

Optimal Wavelet Expansion via Sampled-Data Control Theory

Kenji KASHIMA*, Masaaki NAGAHARA* and Yutaka YAMAMOTO*

Wavelet theory is an important current topic and it has found many applications, for example, signal processing. Wavelet analysis, called discrete wavelet transform, of a signal $x(t)$ in $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ is usually computed by the so-called pyramid algorithm. It however requires as its input the sequence of coefficients in the orthonormal basis of one of the desirable approximation subspaces. An interesting question here is how to initialize the pyramid algorithm when only sampled values of $x(t)$ are available. This paper develops a design method for finite dementional degital filters for this problem based on sampled-data control theory.

Key Words: sampled-data control, discrete wavelet transform

1. はじめに

ウェーブレット変換は、新しい信号解析法として、近年、特に注目を集めている。そして、ウェーブレット理論は、フーリエ変換と共に画像処理、コンピュータビジョン、時系列解析、デジタルフィルタ等様々な分野で用いられるようになり、その応用範囲の拡大が引き続きはかられている。

ここで、実際の $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ 上の連続時間信号をウェーブレット展開する際の計算法は次のようなものである。まず、解析したい信号をある望ましい解像度を持つ部分空間に射影する。そして、より低い解像度の係数を、マルチレートフィルタバンクによるピラミッドアルゴリズムを用いて求める。ここで、ピラミッドアルゴリズムに最初に入力されるべきものは、射影により求められた展開係数列であり、このウェーブレット展開の精度を大きく左右する。

この係数列は解析したい信号とスケーリング関数との $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ での内積により与えられる。しかし、この定義に沿って求める方法は、すべての時間における信号の値が必要なうえ、無限区間の積分であることから、明らかにデジタル処理には適していない。では、元信号をサンプリングすることにより得られたデータから、この係数列を高精度で求めることは可能であろうか。

この問題に対して、文献 1) では定式化を行い、最適なフィルタ設計を行っている。しかし、そこで得られたものは、デジタルフィルタとしての実装は困難である。そこで、本論文では、スケーリング関数がコンパクトな台をもつと仮定することで、この問題を有限次元のフィルタの設計問

題へと帰着させる手法を述べる。また、遅延を許容することで、より誤差が小さくなるフィルタの設計を試みる。

2. 問題設定

2.1 離散ウェーブレット変換

まず、ウェーブレット変換の基礎的な概念についてふれておく。関数空間 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ における正規直交ウェーブレットを構成するときの概念として多重解像度解析 (MRA) がある²⁾。ここで MRA とは、 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ における閉部分空間の列 $\{\mathcal{V}_j : j \in \mathbf{Z}\}$ で、以下の条件を満たすものである。

- (1) すべての $j \in \mathbf{Z}$ にたいして、 $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$ 。
- (2) $\lim_{j \rightarrow -\infty} \mathcal{V}_j = \{0\}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{V}_j = \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ 。
- (3) $f(t) \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \mathcal{V}_{j+1}$ 。
- (4) $f(t) \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow f(t - kh) \in \mathcal{V}_0$ 。
- (5) \mathcal{V}_0 は正規直交基底 $\{\phi(\cdot - kh) : k \in \mathbf{Z}\}$ を持つ。

ただし h は固定した正の実数である。条件 5 の ϕ はスケーリング関数と呼ばれる。条件 3 より、すべての $j \in \mathbf{Z}$ にたいして

$$\phi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \phi(2^j t - kh),$$

は \mathcal{V}_j の正規直交基底となる。この定義より、 j が増加するにしたがって空間 \mathcal{V}_j は $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ の高周波信号をより多く含むと解釈できる。

この MRA から $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ におけるウェーブレットが次のように構成される²⁾。まず $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0$ なる部分空間 \mathcal{W}_0 をとり、 $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ が \mathcal{W}_0 の正規直交基底となるように関数 ψ を定める。この関数 ψ はウェーブレットと呼ばれる。さらに任意の整数 j にたいして、 $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$ となるように \mathcal{W}_j を定めると、

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - kh)$$

* 京都大学情報学研究科

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto

は、空間 W_j の正規直交基底となる。以上より、空間 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ は

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) = \mathcal{V}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0+1} \oplus \cdots,$$

と一意に分解され、任意の関数 $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ は

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j_0}(k) \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

と展開される。これをウェーブレット展開といい、関数 $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ から展開係数 $\{[c_{j_0}(k), d_{j_0}(k), d_{j_0+1}(k), \dots] : k \in \mathbf{Z}\} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ への変換を離散ウェーブレット変換 (DWT) という。

2.2 DWT の計算法

ここで、実際の DWT の計算法について考える。まず、Fig.1 のようなフィルタバンクを用いて、 $\{c_j(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ から、 $\{d_{j-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ および $\{c_{j-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を求めることができることが知られている²⁾。ここで、HPF, LPF はそれぞれ、カットオフ周波数 π/h [rad/sec] のハイパスおよびローパスフィルタであり、 $\downarrow 2$ は

$$\downarrow 2 : \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}) : \{x(k)\}_{k \in \mathbf{Z}} \mapsto \{x(2k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$$

で定義されるダウンサンプラである。

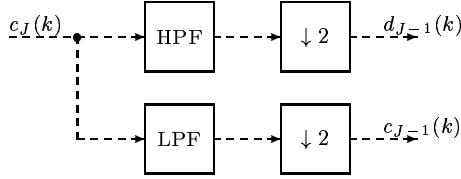


Fig. 1 ピラミッドアルゴリズムの第1段階

この事実を用いて、DWT の計算は、通常、以下のような手順で行われる。

- (1) $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ の近似として、必要な最も高い解像度のレベル J を決める。
- (2) \mathcal{V}_J における $x(t)$ の展開係数 $\{c_J(k)\}_{k \in \mathbf{Z}} = \langle x, \phi_{J,k} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R})}$ が与えられたならば、これをフィルタバンクに入力することで、 $\{d_{J-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $\{c_{J-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を求めることができる。
- (3) 同様に、 $\{c_j(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を用いて、 $\{d_{j-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $\{c_{j-1}(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を求めることができるので、必要な最も粗い精度のレベル j_0 まで $\{d_j(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を求める。

このアルゴリズムはピラミッドアルゴリズムと呼ばれている。

このように、 $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ 上の連続時間信号 $x(t)$ の DWT を計算するには、ピラミッドアルゴリズムの初期値である $\{c_J(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を精度よく求めることが要求される。そこで、以下では、この計算法について考える。

上にも述べたように $\{c_J(k)\}_{k \in \mathbf{Z}} = \langle x, \phi_{J,k} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R})}$ で与えられるため、定義に沿って計算することは困難であろう。このため、その近似としてとしてサンプリングデータをそのまま用いることがある。これは明らかに便宜的な方法であり、

誤差を生じるため、文献 2) において wavelet crime と呼ばれている。そこで、サンプリングデータをフィルタリング処理したものを $c_J(k)$ の近似としたい。このような、元信号のサンプリングデータから $\{c_J(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ を求める問題は DWT の最適初期化問題と呼ばれる。文献 1) ではこの問題を定式化し、その解を示している。次項ではこの手法を示すとともに、その問題点を指摘し、サンプル値制御の枠組みで新たな定式化を行う。そして、3 節でその解法を与える。

2.3 問題の定式化

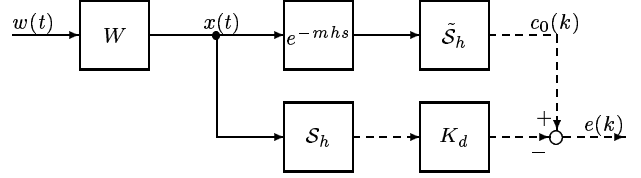


Fig. 2 誤差系

以後、簡単のため $J = 0$ とするが、これにより一般性を失うことはない。以下、Fig.2 に沿って問題の定式化を行う。(ただし、遅延を考慮しないため、 $m = 0$ としている。) まず、扱う元信号として重み関数 W により帯域制限された信号を考える。(ただし、完全帯域制限されている必要はない。) また、この線形時不変な伝達関数 W およびスケーリング関数 ϕ はあらかじめ与えられているものとする。次に、 \tilde{S}_h は

$$\tilde{S}_h : \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}) : x(t) \mapsto \{c_0(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$$

で与えられる作用素であり、上の経路では $c_0(k)$ が出力される。また、 S_h は周期 h [sec] のサンプラであり、その値をデジタルフィルタに通したものが下の経路の出力である。したがって、これらの差 $e(k)$ が誤差を表すこととなり、小さくなることが望ましい。そこで、Fig.2 の系

$$\mathcal{T}_{ew} : \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}) : x(t) \mapsto \{e(k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$$

の誘導ノルムをできるだけ小さくする $K_d(z)$ を設計する。

[問題 1] Fig.2 において、 $m = 0$ のもとで、 $\|\mathcal{T}_{ew}\|$ を最小化する線形時不変フィルタ $K_d(z)$ を求める。

この問題に対しては、文献 1) において次の定理が得られている。

《定理 1》 問題 1 に対する最適なフィルタの 1 つは、

$$\hat{k}_d(e^{j\omega h}) = \frac{\sum_k |\hat{w}(j\omega h + j2\pi k)|^2 \hat{\phi}(-j\omega h - j2\pi k)}{\sum_k |\hat{w}(j\omega h + j2\pi k)|^2}$$

で与えられ、そのときの誤差の最悪値は

$$\left[\sup_{\omega} \sum_k \left| \left[\hat{k}_d(e^{j\omega h}) - \hat{\phi}(-j\omega h - j2\pi k) \right] \hat{w}(j\omega h + j2\pi k) \right|^2 \right]^{1/2}$$

である。ここで、 $\hat{k}_d(e^{j\omega h})$, $\hat{w}(j\omega)$, $\hat{\phi}(j\omega)$ は、それぞれ K_d , W , ϕ の ω [rad/sec] での周波数成分を表す。

しかし、この定理により得られるフィルタは、実装困難なものとなっている。そこで、 \tilde{S}_h について再考し、新たな問題設定を行う。

まず, \tilde{S}_h は,

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_h x)(k) &= (x, \phi_{0,k})_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t - kh) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \check{\phi}(kh - t) dt \\ &= S_h(\mathbf{F}x)(k) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで, \mathbf{F} は $\check{\phi}(t) := \phi(-t)$ をインパルス応答としてもつシステムである。これからもわかるように問題 1 は非因果的な連続時間システム \mathbf{F} を, 離散近似する問題となっている。そこで, 次の仮定を行う。

[仮定 1] スケーリング関数 $\phi(t)$ は $[0, h]$ でコンパクトな台を持つ。すなわち,

$$\phi(t) = 0, \quad t \notin [0, h] \quad (2)$$

である。

この仮定は, 代表的なスケーリング関数である Haar, Spline 等においても成り立っている。この仮定のもと, m ステップの遅延を許容することで, 系全体が因果的となる。そこで, 次の問題を設定する。

[問題 2] Fig.2 において, 与えられたある正の整数 m に対して, $\|T_{ew}\|$ を最小化する因果的な線形時不変フィルタ $K_d(z)$ を求める。ただし, ϕ は仮定 1 を満たし, W の最小実現は (A, B, C) で与えられているものとする。

3. 有限次元問題への帰着

ここでは, $m = 0$ の場合の問題 2 の解法を示し, $m > 0$ の場合についてはあとで述べる。

まず, Fig.2 の連続時間信号をリフティング³⁾する。以後, $x(t)$ をリフティングしたものを $\tilde{x}[k](\theta) := x(kh + \theta)$ と表記する。ここで, x, w をリフティングすると, システム W のリフティング表現

$$\begin{aligned} X(k+1) &= e^{Ah} X(k) + \int_0^h B e^{A(h-\tau)} \tilde{w}[k](\tau) d\tau \\ \tilde{x}[k](\theta) &= C e^{A\theta} X(k) + \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} B \tilde{w}[k](\tau) d\tau \end{aligned}$$

が得られる。ただし, A の次元を n とすると, $X(k) \in \mathbf{R}^n$ である。ここで, 式 (2) より導かれる

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_h x)(k) &= \int_{kh}^{(k+1)h} \phi(t - kh) x(t) dt \\ &= \int_0^h \phi(\tau) x(kh + \tau) d\tau \\ &= \int_0^h \phi(\tau) \tilde{x}[k](\tau) d\tau \end{aligned}$$

という関係に着目すると, Fig.2 のシステムは Fig.3 のように表される。

ただし,

$$A_d := e^{Ah} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

$$B_1 : \mathcal{L}^2[0, h] \rightarrow \mathbf{R}^n : \tilde{x}(\tau) \mapsto \int_0^h e^{A(h-\tau)} B \tilde{x}(\tau) d\tau$$

$$C_{d1} := \int_0^h C e^{A\theta} \phi(\theta) d\theta \in \mathbf{R}^{1 \times n}$$

$$D_{11} : \mathcal{L}^2[0, h] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$: \tilde{w}(\tau) \mapsto \int_0^h \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} B \phi(\theta) \tilde{w}(\tau) d\tau d\theta$$

である。

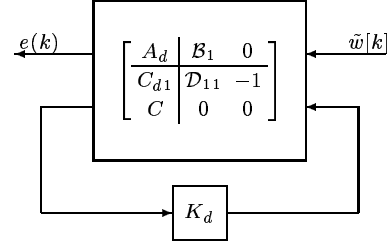


Fig. 3 誤差系

これは,

$$LL^T := \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^* & D_{11}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_{d1} \\ D_{d11} \end{bmatrix} := L$$

で与えられる B_{d1}, D_{d11} を用いて, 等価な離散時間系に変換できる^{4), 5)}。また, $m > 0$ の場合においても, Fig.2 での経路の出力が m ステップ遅れるのみなので, 同様の手法が適用できる。そこで, 次の定理を得る。

<定理 2> 問題 2 は Fig.4 の離散時間系の ℓ^2 誘導ノルムの最小化問題と等価である。ただし, G_{dt} は式 (3) で与えられ, $A_{dt} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ である。

$$G_{dt} = \begin{bmatrix} A_{dt} & B_{dt} \\ C_{dt} & D_{dt} \end{bmatrix} := \begin{cases} \begin{bmatrix} A_d & B_{d1} & 0 \\ C_{d1} & D_{d11} & -1 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, & m = 0 \\ \begin{bmatrix} A_d & 0 & \cdots & 0 & B_{d1} & 0 \\ C_{d1} & 0 & \cdots & 0 & D_{d11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ C & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & m > 0 \end{cases} \quad (3)$$

そして, この離散時間制御問題は, 厳密に解くことができ, 得られるフィルタの次数は高々 $n + m$ である。

4. 数値例

ここでは, 数値例を示す。各パラメータは, サンプリング周期 $h = 1[\text{sec}]$, スケーリング関数は Haar すなわち

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, h] \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

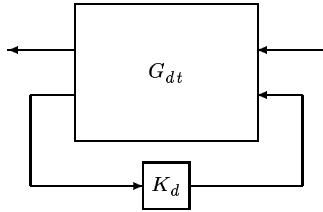


Fig. 4 等価離散時間系

であり、重み関数 W は Fig.5 のようなローパスフィルタ（10 次の楕円フィルタ）である。

定理 1 により設計されたフィルタを K_Q ，定理 2 により、遅れステップが m の場合に設計されたフィルタを $K_{SD,m}$ とする。前節でも述べたように $K_{SD,m}$ の次数は $m+10$ であり，ここでは， $m=0, 1, 10$ の場合の結果を示す。

まず，各フィルタによる各周波数における誤差ノルムは Fig.6 のようになる。次に，Table 1 に各フィルタおよび wavelet crime における誤差ノルムの最悪値を示す。

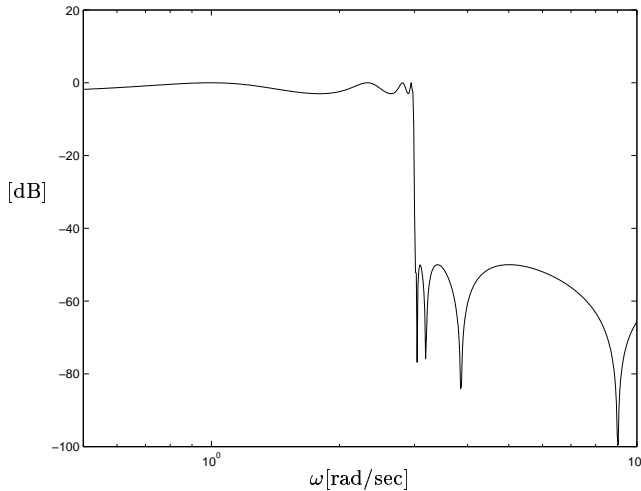


Fig. 5 W の周波数応答 (ゲイン)

フィルタ	誤差ノルム [dB]
wavelet crime	1.2518
K_Q	-49.3251
$K_{SD,0}$	-9.7050
$K_{SD,1}$	-24.7311
$K_{SD,10}$	-41.3923

Table 1 誤差ノルムの最悪値

まず，wavelet crime についての誤差ノルムの最悪値は，非常に大きな値となっている。また，提案法においても，系が非因果的である $K_{SD,0}$ ではやはり誤差は大きい。しかし， $m=1$ として，系が因果的となった場合は，比較的誤差は小さく，その後， m を大きくするとともに，減少している。そして， $m=10$ の場合では，文献 1) によるものになりに

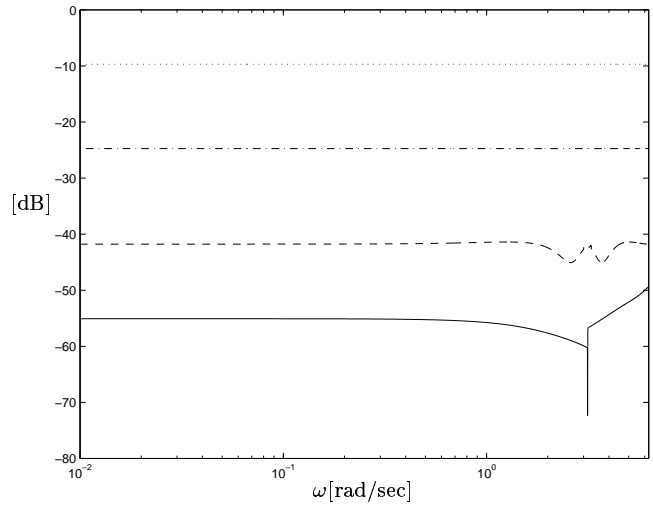


Fig. 6 各周波数における誤差ノルム: $K_Q(z)$ (実線), $K_{SD,0}(z)$ (点線), $K_{SD,1}(z)$ (点破線), and $K_{SD,10}(z)$ (破線)

近い値まで，誤差が小さくなっている。

このように遅延を許容することで，誤差が小さくなる有限次元フィルタが得られていることがわかる。

5. おわりに

この論文では，DWT の最適初期化問題に対して，スケーリング関数がコンパクト台をもつと仮定することで，有限次元のフィルタを設計する手法を示した。また，遅延を許容した場合にもその手法が適用できることを示した。さらに，数値例を示しその有効性を検討した。

今後の課題としては，一般のスケーリング関数に対して， C_{d1} や B_{d1} ， D_{d11} を高精度で計算することがあげられる。また，文献 1) の手法および提案手法とともに，ウェーブレット展開が式 (1) で与えられているとき，サンプリングが周期 h [sec] でおこなわれているときのみしか適用できない。これについても，検討が必要である。

参考文献

- 1) PU Qian and B. A. Francis, "Optimal Initialization of the Discrete Wavelet Transform," submitted for publication May 5, 1999.
- 2) G. Strang and T. Nguyen, *Wavelet and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge, 1997.
- 3) Y. Yamamoto, "New approach to sampled-data systems: a function space method," *Proc. 29th Conf. on Decision and Control*, pp. 1881-1887, 1990.
- 4) T. Chen and B. A. Francis, On the L^2 -induced norm of a sampled system, *Systems and Control Letters*, vol. 15, pp. 211-219, 1990.
- 5) T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-data Control Systems*, Springer, 1995.
- 6) G. Zelniker and F. J. Taylor, *Advanced Digital Signal Processing*, Dekker, 1994.