

# サンプル値制御によるデジタル通信システムの最適設計

永原正章\*・山本裕\*

Design for Digital Communication Systems via Sampled-Data Optimal Control

Masaaki NAGAHARA\* and Yutaka YAMAMOTO\*

The design procedure for the equalization of communication channels is developed based on the sampled-data  $H^\infty$  control theory. The procedure provides a transmitting filter and a receiving filter so as to minimize the error between the original signal and the received signal with a time delay, and reduce the noise added to the channel. While the system has an ideal sampler, a zero-order hold and a time delay, the design problem can be reduced to a finite-dimensional discrete-time problem using the FSFH (fast-sample and fast-hold) approximation. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

## 1. はじめに

インターネットや携帯電話等の急速な発展により、デジタル通信の重要性はますます大きくなってきている。このデジタル通信には次のような利点がある<sup>7)</sup>:

- 情報を圧縮することにより、効率の良い通信が行える。
- 情報を暗号化して伝送できる。
- 雑音に強い。

デジタル通信における信号の流れを Fig. 1 に示す。ディ

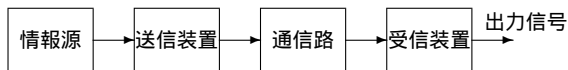


Fig. 1 デジタル通信システム

ジタル通信では、情報源が音声や画像などのアナログ信号である場合は、そのアナログ信号を離散化し、送信装置によって通信路に送られる。通信路においては、その通信路固有の特性による信号の減衰や送信中の信号に加わる雑音などの影響により、一般に受信信号は歪んだ信号となる。この歪みを抑え、もとの信号を復元するために受信装置には等化器とよばれるフィルタが用いられる。

従来のデジタル通信では、情報源の連続時間特性に着目することなく、デジタル通信システム全体を離散時間システムとらえて設計が行われている。例えば、情報源のアナログ信号がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定し、標本化の影響を無視して議論が進められている。しかし実際には完全帯域制限という仮定は成り立た

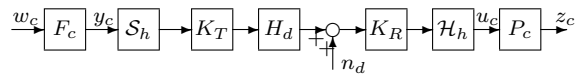


Fig. 2 デジタル通信系

ず、ナイキスト周波数以上の成分が情報源には含まれるはずである。したがって、より精密なデジタル通信システムの設計をおこなうためにはもとのアナログ信号の特性をも考慮しなければならない。

いっぽう連続時間信号と離散時間信号を同時に扱うことのできる理論がサンプル値制御の分野で発展してきた<sup>1)</sup>。またサンプル値制御理論を信号処理に応用する研究が近年なされてきている<sup>4)-6), 8)</sup>。本研究では、これらの研究にもとづきデジタル通信システムの設計にサンプル値制御理論を導入し、元の連続時間信号を考慮した手法を提案する。

文献 2) において、デジタル通信システムにおける受信等化器の設計問題に離散時間  $H^\infty$  最適化手法を用いているが、本研究では、この問題にサンプル値  $H^\infty$  設計を導入する。さらに受信等化器だけでなく送信側のフィルタを含めたデジタル通信システムの設計問題を定式化し、FSFH 近似手法<sup>3), 9)</sup>を用いた近似離散時間系の設計公式を与える。最後に設計例によって、文献 2) と比較し、提案手法の有効性を示す。

## 2. 設計問題

### 2.1 送受信フィルタの設計問題

デジタル通信システムのブロック線図を Fig. 2 に示す。連続時間信号  $w_c \in L^2[0, \infty)$  にたいして連続時間ローパスフィルタ  $F_c(s)$  を作用させ、信号  $y_c$  を得る。このとき  $F_c(s)$  は、デジタル通信において伝送すべき元信号の先見

\* 京都大学情報学研究科 京都市左京区吉田本町

\* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto

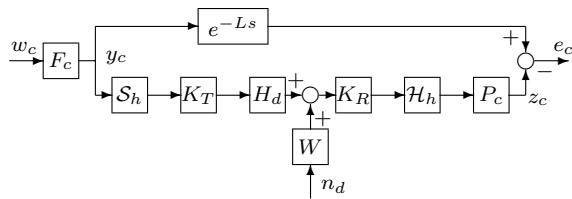


Fig. 3 デジタル通信における誤差系

情報であると考えることができる。連続時間信号  $y_c$  は周期  $h$  で動作する理想サンブラ  $S_h$  によって離散時間信号に変換され、送信フィルタ  $K_T(z)$  から通信路に送信される。

通信路の特性は一般に複雑であり、とくに無線通信などではフェーディングと呼ばれる非線形現象がみられるが、ここでは簡単のため通信路を LTI モデル  $H_d(z)$  であらわす。通信路  $H_d(z)$  の後には、雑音  $n_d$  が付加される。これは、実際の通信路における雑音をあらわすほか、量子化誤差や通信路モデルの不確かさをあらわす。

雑音を含んだ受信信号は受信フィルタ  $K_R(z)$  を通り、周期  $h$  で動作する 0 次ホールドにより連続信号に変換されたのち、アナログフィルタ  $P_c(s)$  により平滑化されて出力信号  $z_c$  が得られる。

デジタル通信では、送受信フィルタ  $K_T(z)$  および  $K_R(z)$  を用いて、通信路および付加雑音によって劣化した受信信号からもとの信号を忠実に再現する必要がある。ここで送信フィルタ  $K_T(z)$  は、通信路の特性によって減衰する周波数帯域をあらかじめ増幅しておく働きがある。また、受信フィルタ  $K_R(z)$  は伝送路で生じたひずみや雑音を除去する働きがあり、等化器と呼ばれる<sup>7)</sup>。これらのフィルタによる復元信号  $z_c$  ともとの信号  $y_c$  を比較するために Fig. 3 の誤差系を考える。ここで送受信フィルタによる復元過程にはある程度の時間遅れが許されるため、時間遅れ要素  $e^{-Ls}$  が用いられる。このブロック線図において入力信号  $w_c$  から誤差信号  $e_c(t) := z_c(t) - y_c(t - L)$  までのシステムを  $\mathcal{T}_{ew}$  とおき、雑音  $n_d$  から誤差信号  $e_c$  までのシステムを  $\mathcal{T}_{en}$  とおく。このとき設計問題は次のように定式化される：

[問題 1] 連続時間フィルタ  $F_c(s)$  と  $P_c(s)$ 、離散時間フィルタ  $W(z)$ 、通信路の離散時間特性  $H_d(z)$ 、時間遅れ  $L$  が与えられたとする。このとき与えられた  $\gamma > 0$  にたいして、

$$\|[\mathcal{T}_{ew}, \mathcal{T}_{en}]\|_\infty^2 := \sup_{w_c \in L^2, n_d \in l^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2} \quad (1)$$

を満たす安定な離散時間フィルタ  $K_T(z)$  と  $K_R(z)$  を求めよ。

## 2.2 設計問題の分割

問題 1 は送受信フィルタの設計問題であるが、本研究では同時に 2 つのフィルタを設計するのではなく、受信フィルタを設計したのちに送信フィルタ設計する 2 段階設計法を用いる。

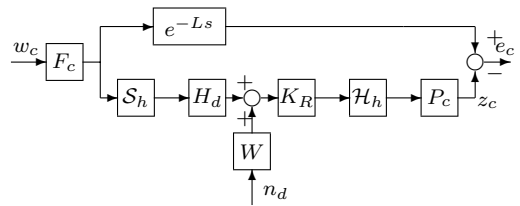


Fig. 4 受信フィルタ設計の誤差系  $\mathcal{T}_R$

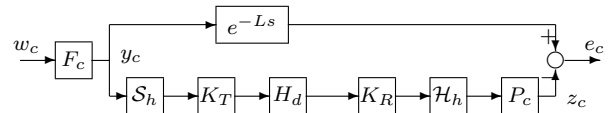


Fig. 5 送信フィルタ設計の誤差系  $\mathcal{T}_T$

明らかに送信フィルタによっては雑音  $n_d$  を除去することはできないので、雑音の除去は受信フィルタによって行う。また、受信フィルタは雑音除去のほかに、劣化した信号の復元も行わなければならない（雑音除去のみなら、最適なフィルタは  $K_R(z) = 0$  になる）。したがって、もとの信号をある程度復元しつつ雑音を除去するための受信フィルタ  $K_R(z)$  をはじめに設計し（Fig. 4）、得られた受信フィルタ  $K_R(z)$  を系に含めて（すなわち、通信路の特性を  $K_R(z)H_d(z)$  と考えて）送信フィルタ  $K_T(z)$  を設計する（Fig. 5）。

**Step 1**(受信フィルタ  $K_R(z)$  の設計) Fig. 4 の誤差系  $\mathcal{T}_R$  にたいして

$$\|\mathcal{T}_R\|_\infty^2 := \sup_{w_c \in L^2, n_d \in l^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2} \quad (2)$$

を最小化するフィルタ  $K_R(z)$  を求めよ。

**Step 2**(送信フィルタ  $K_T(z)$  の設計) Fig. 5 の誤差系  $\mathcal{T}_T$  にたいして

$$\|\mathcal{T}_T\|_\infty := \sup_{w_c \in L^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}}{\|w_c\|_{L^2}} \quad (3)$$

を最小化するフィルタ  $K_T(z)$  を求めよ。

## 3. FSFH 近似手法による設計

設計問題 Step 1 および Step 2 はむだ時間を含むため無限次元のプラントにたいする設計問題となる。本節では FSFH 近似手法<sup>3), 9)</sup>を用いて、無限次元プラントにたいするサンブル値制御系の問題を有限次元離散時間系の設計問題へと変換する。

《定理 1》 (1) Fig. 4 の誤差系  $\mathcal{T}_R$  にたいして、有限次元離散時間系  $\{T_{R,N} : N = 1, 2, \dots\}$  が存在して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{R,N}\|_\infty = \|\mathcal{T}_R\|_\infty.$$

(2) Fig. 5 の誤差系  $\mathcal{T}_T$  にたいして、有限次元離散時間系  $\{T_{T,N} : N = 1, 2, \dots\}$  が存在して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{T,N}\|_\infty = \|\mathcal{T}_T\|_\infty.$$

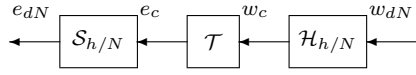


Fig. 6 FSFH 離散化

(証明) FSFH 手法によりサンプル値系を離散化する．ここで FSFH 手法とは，周期  $h$  のサンプル値系の連続時間入出力を，周期  $h/N$  ( $N$  は自然数) で動作するサンプルとホールドによって離散化し，十分大きな  $N$  にたいする離散時間信号で連続時間信号を近似する方法である (Fig. 6)．さらに離散時間リフティング<sup>8)</sup>  $\mathbf{L}_N$  を導入し， $\tilde{e}_{dN} := \mathbf{L}_N(e_{dN})$ ， $\tilde{w}_{dN} := \mathbf{L}_N(w_{dN})$  と変換する．このとき  $\|e_c\|_{L^2} \approx \sqrt{\frac{h}{N}} \|\tilde{e}_{dN}\|_{l^2}$ ， $\|w_c\|_{L^2} \approx \sqrt{\frac{h}{N}} \|\tilde{w}_{dN}\|_{l^2}$  が成り立ち，さらに

$$\|T_{R,N}\|_{\infty}^2 := \sup_{\tilde{w}_{dN}, n_d \in l^2} \frac{\|\tilde{e}_{dN}\|_{l^2}^2}{\|\tilde{w}_{dN}\|_{l^2}^2 + \sqrt{\frac{N}{h}} \|n_d\|_{l^2}^2},$$

$$\|T_{T,N}\|_{\infty} := \sup_{\tilde{w}_{dN} \in l^2} \frac{\|\tilde{e}_{dN}\|_{l^2}}{\|\tilde{w}_{dN}\|_{l^2}}.$$

と定義すると， $T_{R,N}$ ， $T_{T,N}$  は有限次元離散時間系となり，さらに文献 9) により  $\|T_{R,N}\|_{\infty} \rightarrow \|T_R\|_{\infty}$ ， $\|T_{T,N}\|_{\infty} \rightarrow \|T_T\|_{\infty}$  となる．□

定理 1 における有限次元離散時間系の具体的な公式を以下に示す．ただし，プラント  $G$  とフィルタ  $K$  の LFT 接続を  $\mathcal{F}_l(G, K)$  と表わす．

$$T_{R,N} := \mathcal{F}_l(G_{R,N}, K_R),$$

$$G_{R,N}(z) := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-m} F_{dN}(z), 0 \end{bmatrix}, & -P_{dN}(z) \\ \begin{bmatrix} H(z) F_{dN}(z), W(z) \end{bmatrix}, & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_{T,N} := \mathcal{F}_l(G_{T,N}, K_T),$$

$$G_{T,N}(z) := \begin{bmatrix} z^{-m} F_{dN}(z), & -P_{dN}(z) K_R(z) H(z) \\ F_{dN}(z), & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{dN} := \mathbf{L}_N S_{h/N} F \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1},$$

$$P_{dN} := \mathbf{L}_N S_{h/N} P \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1}.$$

ここで， $F_{dN}$ ， $P_{dN}$  はそれぞれ  $N$  入力  $N$  出力の離散時間 LTI システムとなる<sup>1)</sup>．例えば  $P(s)$  の状態空間実現を  $(A, B, C, D)$  とおくと  $P_{dN}$  の状態空間表現は次式で与えられる．

$$P_{dN} = \begin{bmatrix} A_d^N & A_d^{N-1} & A_d^{N-2} B_d & \cdots & B_d \\ C & D & 0 & \cdots & 0 \\ CA_d & CB_d & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA_d^{N-1} & CA_d^{N-2} & CA_d^{N-3} & \cdots & D \end{bmatrix}$$

$$A_d := e^{Ah}, \quad B_d := \int_0^h e^{A\tau} B d\tau.$$

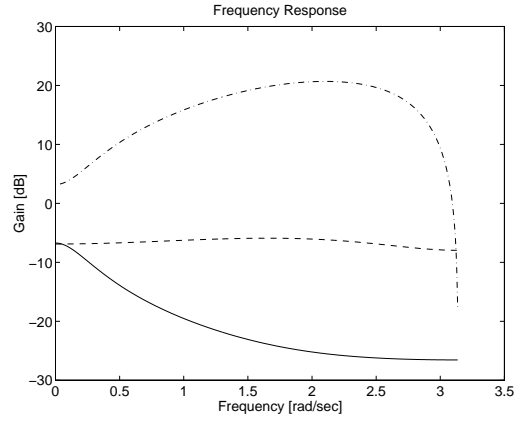


Fig. 7 送受信フィルタの周波数特性: サンプル値  $H^\infty$  設計による受信フィルタ  $K_R(z)$  (実線)，送信フィルタ  $K_T(z)$  (一点破線)，離散時間  $H^\infty$  設計による受信フィルタ  $K_d(z)$  (破線)

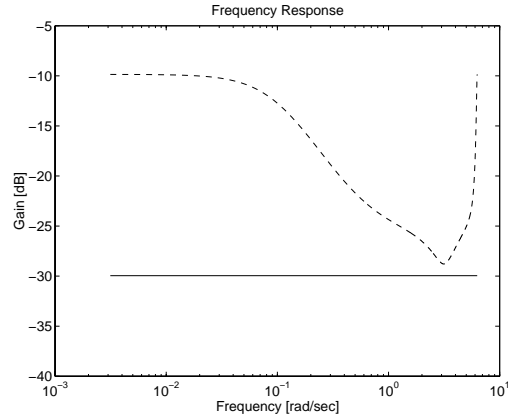


Fig. 8 誤差系  $T_{ew}$  の周波数応答: サンプル値  $H^\infty$  設計 (実線)，離散時間  $H^\infty$  設計 (破線)

#### 4. 設計例

ここでは前節の設計公式を用いて，デジタル通信システムの具体的な設計例を示す．各フィルタを次式とする．

$$F(s) := \frac{1}{10s + 1}, \quad P(s) := 1$$

$$H(z) := 1 + 0.5z^{-1}, \quad W(z) := 1$$

またサンプル周期を  $h = 1$ ，信号復元の遅れを  $L = mh = 2$  とおく．設計のときの FSFH 近似の分割数を  $N = 16$  とする．得られた送受信フィルタの周波数特性を示す．比較のため，文献 2) の離散時間  $H^\infty$  設計法によって得られた受信フィルタ  $K_d(z)$  を示す．

次に，入力信号  $w_c$  から誤差  $e_c$  までのシステム  $T_{ew}$  の周波数応答を図 8 に，雑音  $n_d$  から誤差  $e_c$  までのシステム  $T_{en}$  の周波数応答を図 9 に示す．また Fig. 3 における誤差系  $\mathcal{T} := [T_{ew}, T_{en}]$  の周波数応答を図 10 に示す．従来法に比べ，提案手法によれば  $T_{ew}$  および  $T_{en}$  共に良好な結果が得られている．

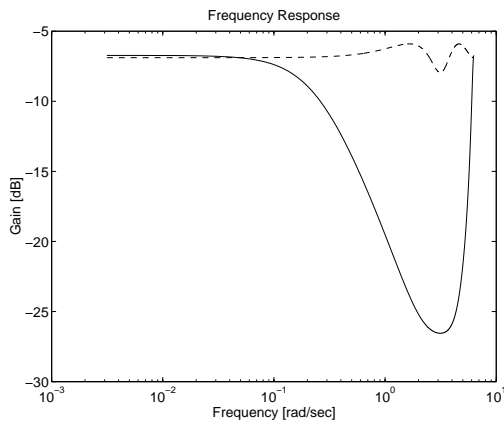


Fig. 9 誤差系  $T_{en}$  の周波数応答: サンプル値  $H^\infty$  設計 (実線), 離散時間  $H^\infty$  設計 (破線)

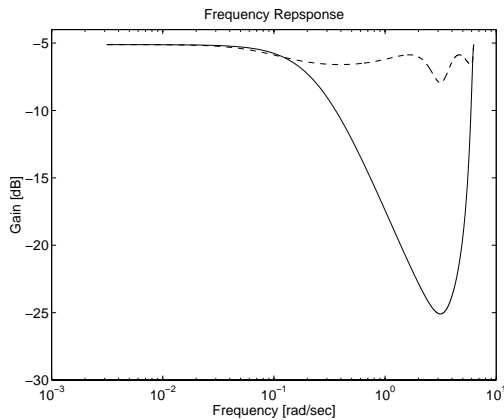


Fig. 10 誤差系  $T$  の周波数応答: サンプル値  $H^\infty$  設計 (実線), 離散時間  $H^\infty$  設計 (破線)

また, このデジタル通信システムの通信シミュレーションを行う. 大きさ 4 の矩形波信号を入力信号に, 周波数  $\omega = 2$ , 振幅 2 の離散正弦波

$$n_d[k] = 2 \sin(2k),$$

を付加雑音とする. 出力の波形を図 11(サンプル値設計), 図 12(離散時間設計) に示す. これより, サンプル値設計の方が従来法よりも矩形波を忠実に再現していることがわかる. これは, 提案手法がアナログ特性を考慮した設計である他に, 送信フィルタ  $K_T(z)$  を導入したために, これだけの差が出たものと考えられる.

### 5. おわりに

本研究では, デジタル通信システムにおける送信/受信フィルタをサンプル値  $H^\infty$  制御により設計した. 従来の離散時間領域での設計と異なり, 本手法では連続時間入出力を考慮した最適設計が可能となる. また, FSFH 手法を用いて設計系を離散時間系に近似し, 設計公式を与えた. 最後に具体的な設計例によって, 本手法の有効性を示した.

### 参考文献

1) T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)

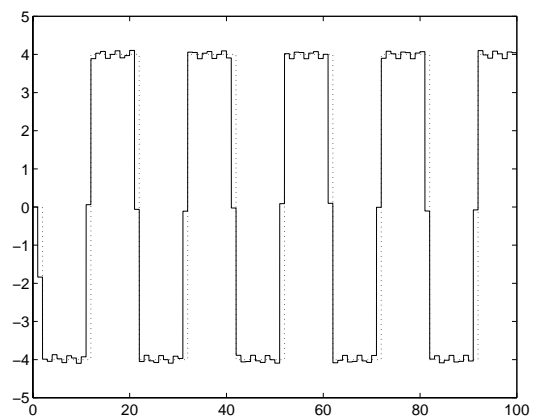


Fig. 11 出力応答 (サンプル値設計)

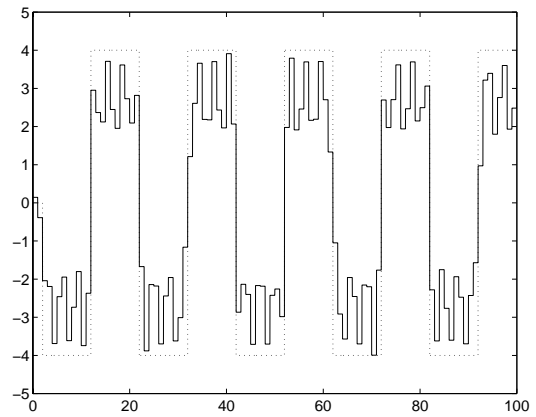


Fig. 12 出力応答 (離散時間設計)

2) A. T. Erdogan, B. Hassibi and T. Kailath:  $H^\infty$  Equalization of communication channels, *ICASSP* (1998)  
 3) J. P. Keller and B. D. O. Anderson: A new approach to the discretization of continuous-time controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.37, No.2, pp.214-223 (1992)  
 4) P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto: Delayed signal reconstruction using sampled-data control, *Proc. of 35th Conf. on Decision and Control*, pp.1259-1263 (1996)  
 5) 永原, 山本, 藤岡: オーバーサンプル D/A 変換器のサンプル値  $H^\infty$  設計, 第 22 回 DST シンポジウム資料, pp. 347-350 (1999)  
 6) 永原, 山本: サンプル値  $H^\infty$  制御によるサンプルレート変換器の設計, 第 29 回制御理論シンポジウム資料, pp. 37-40 (2000)  
 7) J. G. Proakis: *Digital Communications*, McGraw Hill (1989)  
 8) Y. Yamamoto, H. Fujioka and P. P. Khargonekar: Signal reconstruction via sampled-data control with multirate filter banks, *Proc. of 36th Conf. on Decision and Control*, pp.3395-3400 (1997)  
 9) Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems, *Automatica*, vol. 35, pp. 729-734 (1999)