

サンプル値 H^∞ 制御によるサンプルレート変換器の設計

永原 正 章*・山 本 裕*

Sampled-Data H^∞ Design for Sample-Rate Converters

Masaaki NAGAHARA* and Yutaka YAMAMOTO*

This paper proposes a new design methodology for digital filters, interpolators/decimators and sample-rate converters, based on the modern sampled-data control theory. In contrast to the conventional filter designs where the methods are mostly based on frequency domain approximation techniques, the proposed method makes use of the sampled-data H^∞ control theory, thereby allowing for optimizing the intersample behavior and aliasing effects. The novel feature here is that the proposed method can optimize the analog-domain performance over all frequency ranges, thereby guaranteeing a desirable performance without breaking the design problem into several different steps, such as linear phase characteristic, optimal attenuation level design, etc. A design example is presented to show the advantages of the present method.

1. はじめに

デジタルフィルタ設計には、窓関数法や等リップルフィルタなど理想特性を近似する手法や双一次変換法のようにアナログ特性を近似する手法など様々な設計法がある^{(8), (9)}。そして設計の際には、これらの諸手法の中から、その信号処理系に応じて経験的に設計手法が選ばれることが多い。また、これらの設計法は、元の連続時間信号がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定した、離散時間領域での議論である。しかし、信号を完全に帯域制限することは現実には不可能であり、連続時間特性を考慮したデジタルフィルタ設計が望まれる。

この問題に関して文献³⁾では、デジタル信号処理における信号復元問題にサンプル値 H^∞ 制御理論を導入し、連続時間特性を最適化するデジタルフィルタ設計が提案されている。これにより、ナイキスト周波数以上の周波数成分をも考慮した(準)最適な信号復元が可能となる。

本研究では、この手法に基づき、サンプルレート変換におけるデジタルフィルタ設計をサンプル値 H^∞ 制御により行う。従来の手法²⁾では、レート変換の比率が大きい場合、対象となる設計プラントの次数が非常に大きくなり、数値計算を行うことが実際上不可能であったが、本手法では問題を複数の簡単な問題に分割することによって、設計が可能となる。

2. 問題設定

サンプルレート変換器のブロック線図を Fig. 1 に示す。

ここで自然数 L と M は既約とする。まずサンプル周期 h

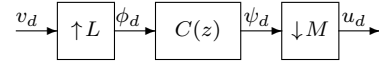


Fig. 1 Sample-rate converter

の離散時間信号 v_d がアップサンブラ

$$\uparrow L : y_d \mapsto x_d : x_d[k] = \begin{cases} y_d[l], & k = Ll, l = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

によってサンプル周期 h/L の離散時間信号 ϕ_d に変換される。次に信号 ϕ_d はデジタルフィルタ $C(z)$ によって処理され、その出力 ψ_d がダウンサンブラ

$$\downarrow M : x_d \mapsto u_d : u_d[k] = x_d[Mk]$$

によって最終的にサンプル周期 Mh/L の信号 u_d に変換される。このフィルタ $C(z)$ の設計問題はサンプル値制御系設計問題として定式化できることが知られており、その際 $C(z)$ は LM 周期時変フィルタとなる²⁾。しかし、もしこのレート L と M が大きな整数であれば、フィルタ $C(z)$ の設計におけるプラントの次数は非常に大きなもの(少なくとも LM 次)となり、数値計算の実行が困難である。

一方、サンプルレート変換器は Fig. 2 のようにも構成できる。ここでシステム $K(z) \uparrow L$ はインターポレータであ

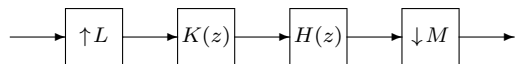


Fig. 2 Sample-rate converter

* 京都大学情報学研究科

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto

り, また $\downarrow MH(z)$ はデシメータである. この構成の利点はフィルタ $K(z)$ と $H(z)$ が前述のフィルタ $C(z)$ に比べ低い次数で構成が可能である点である. 本研究では, サンプルレート変換器の設計において, フィルタ $C(z)$ を直接設計するのではなく, インターポレーションフィルタ $K(z)$ およびデシメーションフィルタ $H(z)$ を別々に設計する手法を提案する. さらに, もし整数 L と M がそれぞれ $L_1 L_2 \cdots L_m$ と $M_1 M_2 \cdots M_n$ に分解することができれば, これらの整数に対応する要素を Fig. 3 に示すようにそれぞれ連続に接続することにより, 大きな比率のサンプルレート変換器を構成できる.

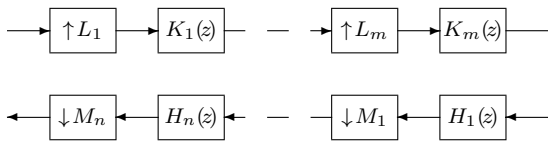


Fig. 3 Sample-rate converter

2.1 インターポレータの設計問題

まずインターポレータの(準)最適設計問題を定式化する. Fig. 4 のブロック線図を考える. 入力信号 w_c に対し, ア

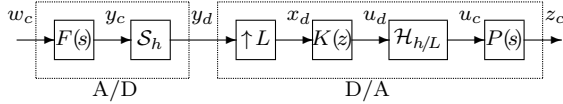


Fig. 4 Multirate Signal Reconstruction

ナローパスフィルタ $F(s)$ によって高周波成分をある程度除去した信号 y_c を考える. ここで $F(s)$ はアナログ信号 y_c の周波数特性を示している. 次にこの信号はサンプル周期 h で動作するサンプラ S_h によって離散時間信号 y_d に変換される.

信号 y_c の復元には通常, 離散時間信号 y_d に対しデジタルフィルタで処理した後, ホールド要素により連続時間信号に変換し, 適当なローパスフィルタによって平滑化する. しかし, ここでは次のようなステップを経て信号を復元する: 離散時間信号 y_d はまずアップサンプラ $\uparrow L$ によってサンプル周期 h/L の離散時間信号 x_d に変換される. 次に, この離散時間信号 x_d はデジタルフィルタ $K(z)$ によって処理され, サンプル周期 h/L で動作する 0 次ホールド $\mathcal{H}_{h/L}$ によって連続時間信号 u_c に変換される. 最後に, この連続時間信号はアナログフィルタ $P(s)$ を通り出力信号 z_c が得られる. ここでの設計問題は, 与えられた $F(s), L, P(s)$ に対してデジタルフィルタ $K(z)$ を求めることである.

Fig. 5 にフィルタ設計の誤差系のブロック線図を示す. 信号の復元には, ある程度の時間遅れが通常は許されるため, 時間遅れ要素 e^{-mhs} が挿入される. 入力信号 w_c から誤差

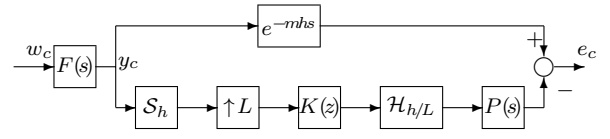


Fig. 5 Signal reconstruction error system

信号 $e_c(t) := z_c(t) - u_c(t - mh)$ までのシステムを T_{ew} とおく. このとき設計問題は次のように定式化される:

[問題 1] 安定な $F(s)$ と $P(s)$ および正数 γ が与えられたとき,

$$\|T_{ew}\| := \sup_{w_c \in L^2[0, \infty)} \frac{\|T_{ew} w_c\|_2}{\|w_c\|_2} < \gamma. \quad (1)$$

を満たすデジタルフィルタ $K(z)$ を求めよ.

2.2 デシメータの設計問題

ここではデシメータの(準)最適設計問題を定式化する. この問題はインターポレータの設計問題と双対の問題と考えられるが, この設計問題は従来あまり議論されていない. Fig. 6 のブロック線図を考える. まず入力信号 w_c はアナ

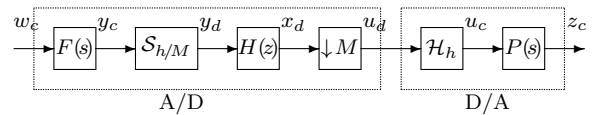


Fig. 6 Multirate Signal Reconstruction

ログフィルタ $F(s)$ を通り y_c を得る. この信号はサンプル周期 h/L のサンプラ $S_{h/L}$ により離散時間信号 y_d に変換される. この離散時間信号 y_d はまずデジタルフィルタ $H(z)$ によって処理され, この信号 x_d はダウンサンプラ $\downarrow L$ によってサンプル周期 h の離散時間信号 u_d に変換される. 次にこの離散時間信号は 0 次ホールド \mathcal{H}_h により連続時間信号 u_c に変換され, アナログフィルタ $P(s)$ を通って出力信号 z_c が得られる. ここでの設計問題は, 与えられた $F(s), L, P(s)$ に対してデジタルフィルタ $H(z)$ を求めることである.

Fig. 7 に設計の誤差系を示す. ここでも信号の復元に時間遅れを許し, 時間遅れ要素を挿入する. 入力信号 w_c から

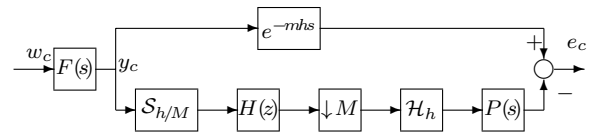


Fig. 7 Signal reconstruction error system

ら $e_c(t) := z_c(t) - u_c(t - mh)$ までのシステムを T_{ew} とおく. 設計問題は次のように定式化される:

[問題 2] 安定な $F(s)$ と $P(s)$ および正数 γ が与えられたとき,

$$\|T_{ew}\| := \sup_{w_c \in L^2[0, \infty)} \frac{\|T_{ew}w_c\|_2}{\|w_c\|_2} < \gamma. \quad (2)$$

を満たすデジタルフィルタ $H(z)$ を求めよ.

3. 有限次元問題への帰着

問題 1 および問題 2 は連続時間の時間遅れ要素を含む無限次元系の設計問題であり, またアップサンプラ $\uparrow L$ もしくはダウンサンプラ $\downarrow M$ を含むためマルチレート系の設計問題でもある.

しかし, 文献^{3), 6)} で用いられた手法を用いて, これらの問題は有限次元単一レートの設計問題に帰着することができる. まず, 離散時間リフティングを定義する.

$$\mathbf{L}_N := (\downarrow N) \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{N-1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{L}_N^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-N+1} \end{bmatrix} (\uparrow N).$$

また $F(s)$ の実現を (A_F, B_F, C_F) とおき, 次の作用素を定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} : L^2[0, h) &\rightarrow L^2[0, h) \\ : w_k &\mapsto \int_0^\theta C_F e^{A_F(\theta-\tau)} B_F w_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

このとき次の定理が成り立つ.

《定理 1》 (1) 正数 γ に対して $\|\mathbf{D}_{11}\| < \gamma$ が成り立つとする. ある有限次元離散時間系 $G_{I11}(z), G_{I12}(z)$ および $G_{I21}(z)$ が存在して, 不等式 (1) は

$$\|z^{-m} G_{I11}(z) - G_{I12}(z) \tilde{K}(z) G_{I21}(z)\|_\infty < \gamma, \quad (3)$$

と等価である. ここで

$$\tilde{K}(z) := \mathbf{L}_L K(z) \mathbf{L}_L^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(2) 正数 γ に対して $\|\mathbf{D}_{11}\| < \gamma$ が成り立つとする. ある有限次元離散時間系 $G_{D11}(z), G_{D12}(z)$ および $G_{D21}(z)$ が存在して, 不等式 (2) は

$$\|z^{-m} G_{D11}(z) - G_{D12}(z) \tilde{H}(z) G_{D21}(z)\|_\infty < \gamma, \quad (4)$$

と等価である. ここで

$$\tilde{H}(z) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}_M H(z) \mathbf{L}_M^{-1}.$$

(証明) (1) 文献 4) 参照.

(2) 離散時間リフティング \mathbf{L}_M を用いて

$$\begin{aligned} (\downarrow M)H(z) &= \tilde{H}(z) \mathbf{L}_M \\ \tilde{H}(z) &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}_M H(z) \mathbf{L}_M^{-1}. \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\tilde{H}(z)$ は M 入力 1 出力の LTI システムであり, 次式を満たす.

$$H(z) = \tilde{H}(z^M) \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{M-1} \end{bmatrix}^T. \quad (5)$$

次に一般化サンプラ $\tilde{S}_h := \mathbf{L}_M S_{h/M}$ ⁶⁾ を用いれば, Fig. 7 のマルチレート系は Fig. 8 の単一レート系と等価となる.

したがって文献 3), 6) の手法を用いて, 問題は有限次元の単一レート系の問題 (3) に帰着される. ■

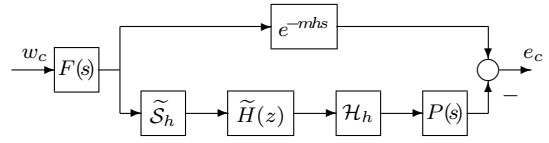


Fig. 8 Reduced single-rate problem

(注意 1) 設計によってえられたフィルタ $\tilde{H}(z)$ から (5) 式より $H(z)$ を構成すると, $H(z)$ が因果的でなくなる場合がある. したがって, デシメーションフィルタとして次のものを用いる.

$$H(z) = z^{-M} \tilde{H}(z^M) \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{M-1} \end{bmatrix}^T.$$

4. ファストサンプルファストホールドによる近似

前節で問題 1 および問題 2 は有限次元の H^∞ 問題に帰着されたが, 条件 $\|\mathbf{D}_{11}\| < \gamma$ が存在し, 数値計算上の問題点がある⁴⁾. したがって本研究では, ファストサンプルファストホールドを用いて近似的に問題を解く手法を用いる^{1), 6)}. この手法は連続時間の入出力に高速で動作するサンプラとホールドを接続することにより, サンプル値系を離散時間系に近似的に帰着させる手法である. また, 近似の精度を上げていけば, 近似離散時間系はもとのサンプル値系に収束することも知られている⁷⁾. 近似離散時間系の設計公式は文献 5) を参照.

5. 設計例

ここでは, サンプル周期を $h_1 = 1$ から $h_2 = 4/3$ に変換するサンプルレート変換器を設計する. このとき $L = 3$, $M = 4$ であり, 既約である. インターポレータ設計の際の $F(s)$ と $P(s)$ をそれぞれ

$$F(s) = \frac{1}{(Ts + 1)(0.1Ts + 1)}, \quad P(s) = 1,$$

とおき, またデシメータ設計の際の $F(s)$ と $P(s)$ を

$$F(s) = \frac{1}{(T_2s + 1)(0.1T_2s + 1)}, \quad P(s) = 1,$$

とおく. ここで $T := 22.05/\pi$, $T_2 := T/L$ であり, これはオーケストラの音楽信号の周波数エネルギー分布をシミュレートしたものである. 比較のため, 31 次の等リプルフィルタ^{8), 9)} を用いて, 提案手法を比較する.

サンプル値設計によって得られたインターポレーションフィルタ $K(z)$ は 11 次であり, デシメーションフィルタは 15 次となった. サンプルレート変換器のフィルタ $C(z) = H(z)K(z)$ のゲイン特性を Fig. 9 に示す. フィルタの次数は 22 である. 同時に等リプルフィルタを示す. 等リプルフィルタは $\omega = \pi/4$ で急峻に減衰するローパス特性を持っているが, サンプル値設計によるものは緩やかな減衰を示している. この特性の差を見るために, 誤差系の周波数応答を Fig. 10 に示す. これより, 特に低周波域と高周波域で約 10dB の差が出ている. また, 入力に矩形波を用いたときの出力をそ

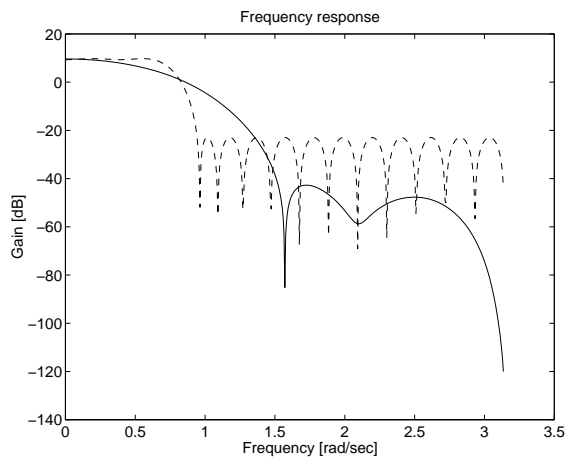


Fig. 9 Frequency response of filter: $C(z)$ (solid) and equiripple filter (dash)

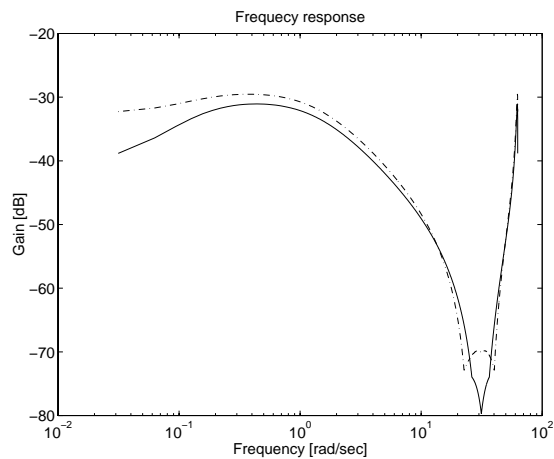


Fig. 10 Frequency response of error system T_{ew} : sampled-data H^∞ synthesis (solid) and equiripple filter (dash)

それぞれ Fig. 11 と Fig. 12 に示す．サンプル値設計による矩形波応答では，矩形波が良く復元できているが，等リプルフィルタによる矩形波応答はリングングを生じている．これは，等リプルフィルタが急峻な減衰特性を持つために生じたギブス現象と考えられる．

6. おわりに

本研究はサンプルレート変換器の設計をサンプル値 H^∞ 設計問題に帰着し，さらに問題を分割することによって大きな比率のレート変換器の設計が可能であることを示した．また従来法と比べた提案手法の有効性を数値例によって示した．

参考文献

- 1) T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, New York (1995)
- 2) H. Ishii, Y. Yamamoto and B. A. Francis, "Sampled-data conversion via sampled-data H^∞ control," *Proc. 38th Conf. on Decision and Control*, pp. 3440–3445 (1999)

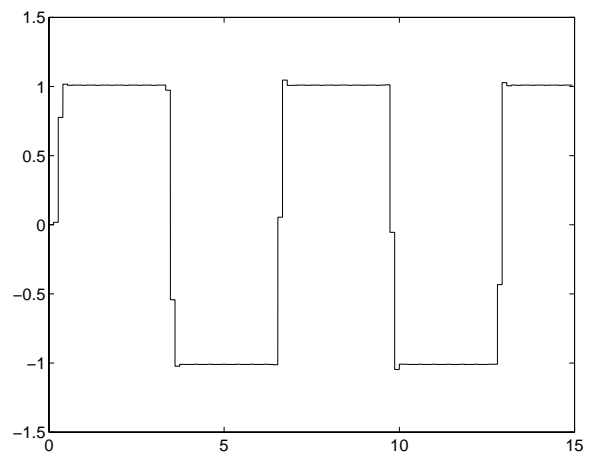


Fig. 11 Time response (sampled-data synthesis)

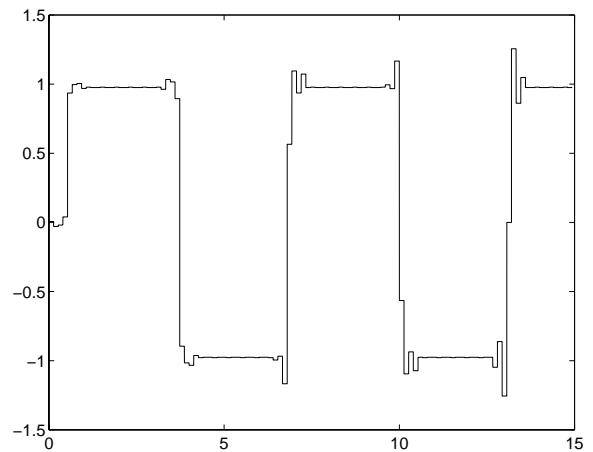


Fig. 12 Time response (equiripple filter)

- 3) P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto, "Delayed signal reconstruction using sampled-data control," *Proc. of 35th Conf. on Decision and Control*, pp. 1259–1263 (1996)
- 4) 永原, 山本, 藤岡, "オーバーサンプル D/A 変換器のサンプル値 H^∞ 設計," 第 22 回 DST シンポジウム予稿集, pp. 347–350 (1999)
- 5) 永原, "サンプル値 H^∞ 制御理論によるマルチレートデジタル信号処理," 京都大学情報学研究科修士学位論文 (2000)
- 6) Y. Yamamoto, H. Fujioka and P. P. Khargonekar, "Signal reconstruction via sampled-data control with multirate filter banks," *Proc. 36th Conf. on Decision and Control*, pp. 3395–3400 (1997)
- 7) Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson, "Approximation of frequency response for sampled-data control systems," *Automatica*, vol. 35, No. 4, pp. 729–734 (1999)
- 8) P. P. Vidyathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1993)
- 9) G. Zelniker and F. J. Taylor, *Advanced Digital Signal Processing: Theory and Applications*, Marcel Dekker (1994)