

切り替えサンブラによる信号圧縮と H^∞ 最適復元

森正憲 永原正章 山本裕 (京都大学)

Digital Signal Compression Using Nonuniform Sampler and Its Reconstruction via H^∞ Optimization

M. Mori, M. Nagahara, and Y. Yamamoto (Kyoto University)

Abstract— In this paper we consider a signal reconstruction problem from signals compressed with a class of nonuniform sampling. The compression system is composed of several decimators and a switch which compares filtered signals to the uniformly sampled signal for every fixed interval. We design a digital filter and an interpolator which reconstruct the original analog signal via sampled-data H^∞ optimization.

Key Words: Nonuniform sampling, Signal reconstruction, Sampled-data H^∞ control, Optimal hold

1 はじめに

サンプリングは、デジタル信号処理において本質的な操作である。サンプル間隔が短いほど処理精度は向上するが、処理すべきデータ量は増大する。したがって、サンプル間隔が一定であれば、処理精度と処理すべきデータ量との間にトレードオフの関係が生じる。そこで、入力信号に応じてサンプル間隔を適応的に変化させる方法が提案されている [15]。すなわち、低周波の信号に対してはサンプル間隔を長く、また高周波の信号に対してはサンプル間隔を短くする。このような考え方は Wavelet 解析における多重解像度解析として理論的に確立され、マルチレート信号処理の方法を用いて容易に実現できる [11, 13]。MPEG や JPEG などの情報圧縮技術はこれを基礎としており [11]、現在のデジタル信号処理において非常に重要な概念である。

本研究では、この多重解像度解析の考え方を基礎とし、信号がどの解像度に属するかを信号のサンプル値から推定し、その解像度で信号をサンプリングすることによってデータを圧縮する方法を提案する。多重解像度解析における基底関数として、従来は完全帯域制限関数 (sinc 関数) や区分的多項式関数 (スプライン) などが用いられてきたが [11]、これらの基底関数は、Shannon のサンプリング定理 [9, 12] における理論的な制約 (完全帯域制限) をもとにして考えられたものであり、現実の信号をモデル化したものとは言いがたい。いっぽう、本研究では、サンプル値制御理論 [2] を導入し、帯域制限の仮定を満たさないより現実的なモデルをもとに解像度を推定する手法を提案する。

さらに、提案手法によって圧縮された信号を復元するために、サンプル値 H^∞ 制御理論を導入する。すなわち、連続時間信号と離散時間信号をともに含むサンプル値系として信号復元系をモデル化し、その誤差系の H^∞ ノルムを最小化する (準) 最適なデジタルフィルタと一般化ホールドを設計することを提案する。サンプル値制御の枠組みでの H^∞ 最適制御器と一般化ホールドの設計は [6, 3, 7] で示されているが、本研究では、遅れ信号復元問題 [5] に対する設計公式を導出し、デジタルフィルタおよび一般化ホールドを数値的に求めることが可能であることを示す。

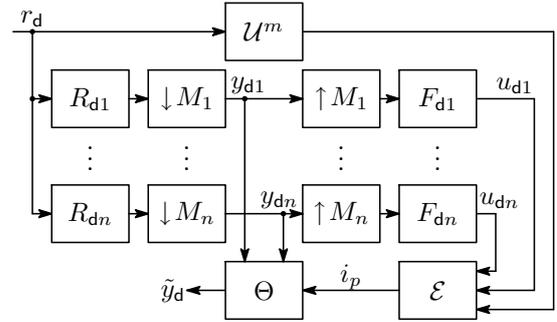


Fig. 1: Nonuniform sampler

2 切り替えサンブラによる信号圧縮

2.1 切り替えサンブラの構成

本研究で考察する切り替えサンブラの構成を Fig. 1 に示す。ただし

$$0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n, \quad M_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n$$

に対して $\downarrow M_i$ と $\uparrow M_i$ はそれぞれダウンサンブラとアップサンブラ、 R_{di} はデシメーションフィルタ、 F_{di} は補間フィルタである。また \mathcal{E} と Θ はそれぞれ動作周期 $T \in \mathbb{N}$ の評価器と選択器、 \mathcal{U}^m ($m \in \mathbb{N}$) は m ステップの遅れである。遅れ \mathcal{U}^m は 2.2 節で述べる補間フィルタ F_{di} の性能を向上させる目的で設定してある。

いま Fig. 1 における入力 r_d は、対象とする連続時間信号 r_c を周期 $h > 0$ の理想サンブラ S_h で等間隔サンプリングした信号である。この r_d をデシメータ ($\downarrow M_i$) R_{di} で各々間引いた信号 y_{di} を一定間隔 (フレーム) 毎に切り替えて出力し、 r_d を不等間隔に間引きたい。

ただしデシメータによって失われる高周波域を考慮するため、 y_{di} をインターポレータ $F_{di}(\uparrow M_i)$ で補間した信号 u_{di} と $\mathcal{U}^m r_d$ とをフレーム毎に比較評価し、信号 y_{di} を切り替えて出力する。この評価規範として、本手法ではフレーム毎に SN 比 $\gamma_{p,i}$:

$$\gamma_{p,i} := 10 \log_{10} \frac{\sum_{k \in f_p} |r_d[k-m]|^2}{\sum_{k \in f_p} |r_d[k-m] - u_{di}[k]|^2}, \quad (1)$$

$$f_p := \{m + pT + k\}_{k=0, \dots, T-1}, \\ p \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, n$$

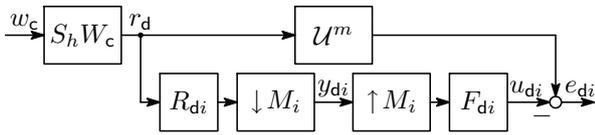


Fig. 2: Interpolator design problem

を計算し，適当に定めた閾値 $\gamma_R \in \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma_{p,i} > \gamma_R \quad (2)$$

を満たす最大の $i = i_p \in \{1, \dots, n\}$ を求める（そのような i_p が存在しない場合は最小の倍率 $i_p = 1$ を選択する）ことでデシメータの出力 y_{d_i} を切り替える．

以上の構成により，等間隔の離散時間信号 r_d を不等間隔に間引くことで圧縮した信号 \tilde{y}_d を得る．圧縮率は設定した閾値 γ_R によって変化させることができる．

2.2 補間フィルタの設計

Fig. 1 の切り替えサンブラの構成において，デシメータで失われる高周波域はどのように補間すべきであろうか．文献 [15] では完全帯域制限の仮定の下で線形補間や Lagrange 補間などを用いるとしていた．しかしこれでは仮定は現実的ではないばかりか，原信号 r_c の周波数特性を考慮した補間であるとはいえない．

これに対し本手法では，各 $i = 1, \dots, n$ について Fig. 2 のような誤差系を考え，補間フィルタの出力 u_{d_i} と信号 $U^m r_d$ との差 e_{d_i} ができるだけ小さくなるような補間フィルタ F_{d_i} を設計する．ただし W_c は伝達関数が厳密にプロパーかつ安定である有限次元の連続時間線形時不変システムであり，連続時間信号 r_c の周波数特性を表すものとする．

いま切り替えサンブラは補間フィルタの出力 u_{d_i} と信号 $U^m r_d$ との SN 比を各フレームにおいて比較評価することに注意すると，補間フィルタ F_{d_i} は全周波数帯域において平均的な性能を持つことが望ましいと考えられる．そこで本手法においては評価規範として H^2 ノルムを用いることとし，さらに比較評価が離散時間で行われることを踏まえて次のようにフィルタ設計問題を定式化する．

問題 1. 各 $i = 1, \dots, n$ について Fig. 2 の誤差系を考え， w_c から e_{d_i} までの作用素を $T_{ew,i}$ とする．このとき， $\|T_{ew,i} \delta\|_{\ell^2}$ を最小化する因果的かつ線形時不変の離散時間フィルタ F_{d_i} を求めよ．

問題 1 は離散時間リフティング [2] を用いることで標準的な離散時間 H^2 最適制御問題に帰着できる．

3 H^∞ 最適復元

3.1 問題設定

2 節で述べた切り替えサンブラの処理系を \tilde{S}_d とする．本節では，切り替えサンブラの出力 $\tilde{y}_d = \tilde{S}_d r_d = \tilde{S}_d S_h r_c$ から原信号 r_c を復元する処理系を設計する問題を考える．

このためには信号 \tilde{y}_d の不等間隔性の解析が不可欠であるが，その解析は一般に困難である．そこで本手法では，まず不等間隔信号 \tilde{y}_d を次に定義する離散時間ゼロ次ホールド $\tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}}$ を用いてサンプル周期 h の等間隔信号 $y_d := \tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{y}_d$ に変換する．

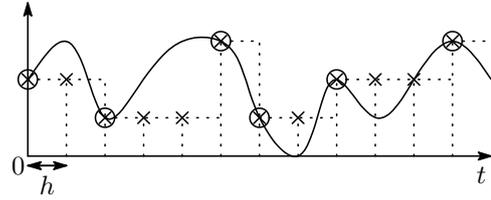


Fig. 3: An example of r_c (solid line), $\tilde{y}_d = \tilde{S}_d S_h r_c$ (○), and $y_d = \tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{y}_d$ (×)

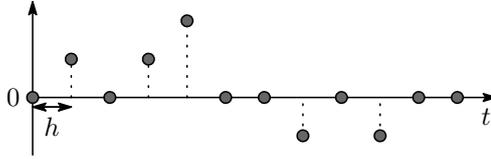


Fig. 4: Disturbance n_d of Fig. 3

定義 2. 信号 $\{\tilde{u}_d[t_k]\}_{t_k \in \mathbb{Z}_+}$ は時刻 $\tau_k = t_k h$, $h > 0$ に値を持ち，かつ任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して $t_k < t_{k+1}$ を満たすとする．このとき，次の作用素

$$\tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} : (\tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{u}_d)[l] := \tilde{u}_d[t_k], \quad l = t_k, \dots, t_{k+1} - 1$$

を離散時間ゼロ次ホールドという．

原信号 r_c (実線)，切り替えサンブラの出力 \tilde{y}_d (○印)，および離散時間ゼロ次ホールドの出力 y_d (×印) の例を Fig. 3 に示す．次に，原信号を等間隔サンプリングした信号 $r_d = S_h r_c$ と，切り替えサンブラの出力をゼロ次補間した信号 $y_d = \tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{y}_d$ との差を n_d :

$$n_d := y_d - r_d = \tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{y}_d - S_h r_c$$

とする．Fig. 3 の例に対する n_d を Fig. 4 に示す．

ここで信号 n_d を外乱と見なし，その影響を小さく抑える復元処理系を設計することとする．このために信号 r_c および n_d に次の周波数特性モデルを仮定する．

仮定 3. 連続時間信号 r_c は，伝達関数が厳密にプロパーかつ安定である有限次元の連続時間線形時不変システム W_c を用いて

$$r_c = W_c w_c, \quad w_c \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

と書ける．

仮定 4. 離散時間信号 n_c は，伝達関数がプロパーかつ安定である有限次元の離散時間線形時不変システム W_{nd} を用いて

$$n_d = W_{nd} w_{nd}, \quad w_{nd} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

と書ける．

以上の準備の下で Fig. 5 の誤差系を考える．ただし W_c は仮定 3 に現れる連続時間システム， W_{nd} は仮定 4 に現れる離散時間システムである．また K_d は離散時間コントローラ， H_h はホールド関数 ϕ_H のホールド：

$$H_h : (H_h u_d)(kh + \theta) := \phi_H(\theta) u_d[k], \quad (3)$$

$$\theta \in [0, h), \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

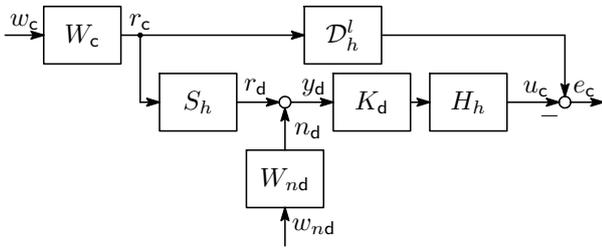


Fig. 5: Signal reconstruction problem

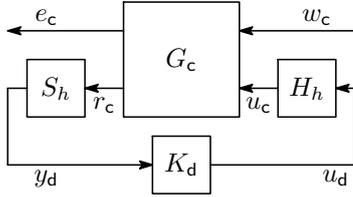


Fig. 6: Linear fractional transformation representation of Fig. 5 ($w_{nd} = 0$)

である。さらに、 $\mathcal{D}_h^l = \mathcal{D}_{lh}$ は遅れ時間 lh ($l \in \mathbb{N}$) の遅れ作用素である。この \mathcal{D}_h^l はコントローラ K_d の性能を向上させる目的で設定してある。

この誤差系において、下の信号路からは仮定 3 および仮定 4 を満たす信号 r_c および n_d に対して $y_d = n_d + S_h r_c$ をコントローラ K_d で処理し、そのサンプル点間をホールド H_h で補間した連続時間信号 u_c が出力される。ここでホールド H_h 、すなわちサンプル点間の補間式が与えられた場合、コントローラ K_d の設計は文献 [5] のような遅れ付き信号復元問題に帰着する。これに対して本手法では、コントローラ K_d およびホールド H_h を設計パラメータとすることでサンプル点間を最適に補間する問題を以下のように定式化する。

問題 5. Fig. 5 の誤差系において、 w_c から e_c までの作用素を T_{ew} 、 w_{nd} から e_c までの作用素を T_{en} とおく。このとき、与えられた $\gamma > 0$ に対して

$$\| [T_{ew}, T_{en}] \|^2 := \sup_{\substack{w_c \in L^2, \\ w_{nd} \in \ell^2}} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|w_{nd}\|_{\ell^2}^2} < \gamma^2$$

を満たす因果的かつ線形時不変の離散時間コントローラ K_d およびホールド H_h を求めよ。

問題 5 において γ を最小化する K_d および H_h を求めることにより、不等間隔信号 \tilde{y}_d から原信号 r_c を最適に復元する信号 u_c を

$$u_c = H_h K_d \tilde{\mathcal{H}}_d^{\text{zoh}} \tilde{y}_d$$

として得る。

3.2 主要結果

スケージングにより γ は W_c, W_{nd} に含めることができるので、以下では $\gamma = 1$ とおいた問題 5 を考える。

いま Fig. 5 において $w_{nd} = 0$ とすると、問題 5 は Fig. 6 において

$$\| \mathcal{F}_l(G_c, H_h K_d S_h) \|_{L^2\text{-induced}} < 1,$$

$$G_c := \begin{bmatrix} \mathcal{D}_h^l W_c & -I \\ W_c & 0 \end{bmatrix}$$

を満たすコントローラ K_d とホールド H_h を求める問題に帰着する¹。これはサンプル値 H^∞ 制御問題の枠組みで扱うことができ、リフティング [16] とループシフティング [7] を用いると、次の補題により得られる離散時間系 G_f に関する離散時間 H^∞ 制御問題に帰着する。

補題 6 ([14]). \mathcal{L}_h をリフティング作用素として

$$G_{c0} := \begin{bmatrix} W_c & -I \\ S_h W_c & 0 \end{bmatrix}, \quad W_c := \mathcal{L}_h W_c \mathcal{L}_h^{-1},$$

$$S_h := S_h \mathcal{L}_h^{-1}, \quad H_h := \mathcal{L}_h H_h$$

とおき、

$$\hat{G}_{c0}(z) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & 0 \\ \hline C_1 & D_{11} & -I \\ C_{c1} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

と書く²。いま

$$\gamma_h := \| D_{11} \Pi_B \|_{L^2[0,h]\text{-induced}}, \quad (4)$$

$$\Pi_B := I - B_1^* (B_1 B_1^*)^\dagger B_1$$

とおくと³、 $\gamma_h < 1$ のとき次の 2 つは等価である：

- $\| \mathcal{F}_l(G_c, H_h K_d S_h) \|_{L^2\text{-induced}} < 1$ である。
- システム G_f :

$$G_f := \begin{bmatrix} \Delta^{-1/2} G_{f11} & -\Delta^{-1/2} \\ S_h W_c & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\Delta := I - D_{11} \Pi_B D_{11}^*,$$

$$G_{f11} := D_{11} B_1^* (B_1 B_1^*)^\dagger u^l B_1 + C_1 u^l W_A B_1,$$

$$\hat{W}_A(z) := \left[\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

に対して $\| \mathcal{F}_l(\hat{G}_f, H_h \hat{K}_d) \|_\infty < 1$ である。

式 (5) の G_f は

$$\hat{G}_f(z) = \left[\begin{array}{c|cc} A_G & B_{G1} & 0 \\ \hline \Delta^{-1/2} C_{G1} & 0 & -\Delta^{-1/2} \\ C_{G2} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (6)$$

と書ける。しかしこれは無限次元作用素 $B_{G1}, C_{G1}, \Delta^{-1/2}$ を含んでおり、このままでは離散時間 H^∞ 制御問題を解くことは困難である。

ここで G_f について H^∞ 制御問題の正則性に関する次の仮定をおく。

仮定 7. 式 (6) の G_f について、任意の $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して

¹システム G と K の下側線形分数変換を $\mathcal{F}_l(G, K)$ と表す。

²システム G の伝達関数を \hat{G} と表す。また

$$\hat{G}(z) = D + C(zI - A)^{-1} B =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

と書く。

³行列 A の Moore-Penrose 型擬似逆行列を A^\dagger と書く。

- $\begin{bmatrix} A_G - e^{j\theta} I & 0 \\ \Delta^{-1/2} C_{G1} & -\Delta^{-1/2} \end{bmatrix}$ は左可逆であり, かつ
- $\begin{bmatrix} A_G - e^{j\theta} I & B_{G1} \\ C_{G2} & 0 \end{bmatrix}$ は右可逆である.

すると文献 [10] による解の表現を用いることにより次の定理 [8] が成り立つ. この定理が本研究の主要結果である.

定理 8. 式 (4) の γ_h に対して $\gamma_h < 1$ であり, かつ式 (6) の G_f は仮定 7 を満たすとする. このとき, $\|\mathcal{F}_l(\hat{G}_f, H_h \hat{K}_d)\|_\infty < 1$ を満たす $H_h K_d$ の 1 つは, ある有限次元の離散時間線形時不変システム K'_d を用いて

$$H_h K_d = C_{G1} K'_d \quad (7)$$

で与えられる. さらに

$$B_{G1} B_{G1}^* = \bar{B}_{G1} \bar{B}_{G1}^\top, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} C_{G1}^* \Delta^{-1} C_{G1} & -C_{G1}^* \Delta^{-1} C_{G1} \\ -C_{G1}^* \Delta^{-1} C_{G1} & C_{G1}^* \Delta^{-1} C_{G1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{C}_{G1}^\top \\ \bar{D}_{G12}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{G1} & \bar{D}_{G12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

を満たす任意の行列 $\bar{B}_{G1}, \bar{C}_{G1}, \bar{D}_{G12}$ を用いて, 有限次元の離散時間線形時不変システム G_d を

$$\hat{G}_d(z) := \begin{bmatrix} A_G & \bar{B}_{G1} & 0 \\ \bar{C}_{G1} & 0 & \bar{D}_{G12} \\ C_{G2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

と定義すると, 次の 2 つは等価である.

- $\|\mathcal{F}_l(\hat{G}_f, H_h \hat{K}_d)\|_\infty < 1$ である.
- $\|\mathcal{F}_l(\hat{G}_d, \hat{K}'_d)\|_\infty < 1$ である.

式 (8) および式 (9) の左辺の行列は文献 [6] に掲げられている 2 点境界条件付システム (STPBC: System with Two-Point Boundary Condition) 表現の公式を組み合わせることで計算できる. さらに式 (3) の (最適) ホールド関数 ϕ_H はある行列 A_H, B_H, C_H を用いて

$$\phi_H(\theta) = C_H e^{A_H \theta} B_H, \quad \theta \in [0, h]$$

と表現できる [8].

さて定理 8 を用いることで式 (10) の等価離散時間システム

$$G_d = \begin{bmatrix} G_{d11} & G_{d12} \\ G_{d21} & 0 \end{bmatrix}$$

を得る. これに Fig. 5 の離散時間入力信号 w_{nd} を戻し,

$$G'_d = \left[\begin{array}{c|c} G_{d11} & G_{d12} \\ \hline G_{d21} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ W_{nd} \\ 0 \end{array}$$

とする. 定理 8 のコントローラ K'_d はこの離散時間システム G'_d に対する標準的な離散時間 H^∞ 制御問題 [10, 4] を解くことにより求められる. また, MATLAB 等を用いると数値的に解くことができる [1].

4 おわりに

本稿では信号を不等間隔サンプリングにより圧縮し, 原信号に復元する手法を提案した. 圧縮には信号の周波数特性を考慮してサンプル周期を変更する切り替えサンブラを用いた. さらにコントローラとホールドを設計パラメータとした信号復元問題を考え, 離散時間 H^∞ 制御問題に帰着することを示した. なお具体的な設計例は発表時に紹介する.

謝辞 本研究に関して数々のご協力 (特に定理 8 の証明に関するご助言) を戴きました藤岡久也准教授 (京都大学) に感謝の意を表します.

参考文献

- [1] G. Balas, R. Chiang, A. Packard, and M. Safonov, *Robust Control Toolbox, For Use with MATLAB, User's Guide Version 3*, The Mathworks, Inc., 2005.
- [2] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, 1995.
- [3] H. Fujioka and S. Hara, "Synthesis of sampled-data H_∞ servo controller with generalized hold," *IEEE Trans. Autom. Control*, 48-5, pp. 2302-2307, 2003.
- [4] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4-4, pp. 421-448, 1994.
- [5] P. P. Khargonekar and Y. Yamamoto, "Delayed signal reconstruction using sampled-data control," In *Proc. IEEE CDC*, pp. 1259-1263, 1996.
- [6] L. Mirkin and Z. J. Palmor, "A new representation of lifted systems with applications," Technical report TME-439, Technion — Israel Institute of Technology, 1995.
- [7] L. Mirkin and G. Tadmor, "Yet another H^∞ discretization," *IEEE Trans. Autom. Control*, 48-5, pp. 891-894, 2003.
- [8] 森, "切り替えサンブラによる信号圧縮と H^∞ 最適復元," 修士論文, 京都大学, 2008.
- [9] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," In *Proc. IRE*, 37, pp. 10-21, 1949.
- [10] A. A. Stoorvogel, *The H_∞ Control Problem: A State Space Approach*, Prentice-Hall, 1992.
- [11] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [12] M. Unser, Sampling — 50 years after Shannon, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, No. 4, pp. 569-587, 2000.
- [13] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993.
- [14] 和田, "不等間隔にサンブルされた信号からの H^∞ 最適復元," 修士論文, 京都大学, 2007.
- [15] 渡辺, 河野, 今井, 羽鳥, "適応サンプリング速度音声符号化," 電子情報通信学会論文誌 A, 72-3, pp. 449-456, 1989.
- [16] Y. Yamamoto, "A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems," *IEEE Trans. Autom. Control*, 39-4, pp. 703-712, 1994.