

サンプル値制御理論による適応アルゴリズムの設計

永原正章 山本裕 (京都大学)

Design of Adaptive Algorithm via Sampled-data Control Theory

M. Nagahara and Y. Yamamoto (Kyoto University)

Abstract— Design and analysis of adaptive algorithms such as LMS (Least Mean Square) algorithms are conventionally done by assuming that the adaptive systems are discrete-time systems. However, in real systems such as active noise control, systems to be adapted are continuous-time ones. Therefore, such systems should be designed and analyzed as sampled-data systems. In this article, we propose a design of adaptive systems taking account of continuous-time behaviors via lifting technique in sampled-data control theory.

Key Words: Sampled-data control, Adaptive filter, Lifting

1 はじめに

近年のデジタル技術の発展により、信号処理ではデジタル機器を用いて処理を行うのが一般的である。例えば、本研究で考察するアクティブ消音システムでは、高速かつ高性能の DSP (Digital Signal Processor) を用いることによって、高度な適応アルゴリズムを採用することが多い [2, 5]。

アクティブ消音システムにおける適応システムでは、通常の適応フィルタの場合 [3] と異なり、制御出力 (スピーカ) から誤差信号を測定するマイクまでの 2 次経路に伝達特性が存在する。この 2 次経路による特性の変化を補償するために、参照信号をフィルタリングした信号を適応アルゴリズムに用いる方法があり、filtered- x 適応アルゴリズムと呼ばれる [6]。ここで用いられるフィルタは、2 次経路の伝達関数をモデル化したものであり、通常は離散時間システムで表現され、DSP 上に実装される。したがって、現在の filtered- x 適応アルゴリズムのほとんどは、2 次経路を離散時間システムと仮定して議論が進められている (例えば、[6, 2] など)。

しかし、現実には 2 次経路は連続時間システムであり、アクティブ消音システムは、連続時間システムと離散時間システム、および AD / DA 変換回路を含むハイブリッドシステムとなる。したがって、それらの連続/離散時間特性を考慮した解析や設計が望ましい。このような観点からの設計方法は、いくつか提案されている。文献 [9] では、この方法は、アナログフィルタと適応デジタルフィルタの両方を用いることにより、2 次経路の変化に対してロバストな消音システムを設計する方法である。しかし、アナログフィルタを実際に用いることは、システムの信頼性や保守性の面から、あまり歓迎されない。また、[5] では、参照信号を有限個の正弦波の重ね合わせで表現できると仮定し、連続時間システムの周波数応答を用いることにより適応アルゴリズムを導出しており、周波数選択型アルゴリズムと呼ばれる。この方法は、参照信号の周波数がわかっている場合は非常に有効な方法であるが、考慮していない周波数の入力に対してはノイズ除去ができない。また、周波数の数が多くなればなるほど制御器が複雑になる。

いっぽう、制御理論の分野では、連続時間で動作するシステムに対する離散時間コントローラの厳密な設

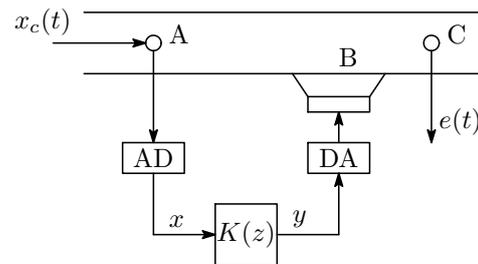


Fig. 1: アクティブ消音システム

計法として、リフティングと呼ばれる数学的手法を基礎としたサンプル値制御理論が 90 年代初めに提案された [10]。これにより、デジタル制御系の厳密な解析や設計が可能となった [1]。特に文献 [4] では、本稿で考察するアクティブ消音に対して、サンプル値 H^∞ 制御を用い、ダクト特性のモデル化誤差を考慮したロバスト制御を提案している。いっぽう、サンプル値制御理論の信号処理系への応用も盛んに研究され、有効性が示されている [12]。本研究では、サンプル値制御理論の信号処理への応用という観点から、リフティングを用いた filtered- x LMS アルゴリズムの構成法を提案する。このような観点からの研究は、文献 [13] によって提案されており、本研究は、この研究に動機付けられたものである。文献 [13] では、リフティングの概念が陽には用いられていないが、本研究ではリフティング作用素のユニタリ性を陽に用いて、適応アルゴリズムの導出を行う。また、適応アルゴリズムの収束性についても考察し、適応システムが安定ならば、サンプル点間応答を考慮した最適解に収束することを示す。

2 アクティブ消音における適応アルゴリズム

図 1 のアクティブ消音システムを考える。この図において、 $x_c(t)$ はダクトに入力する雑音 (参照信号) であり、連続時間信号である。この信号を A 点に設置したマイクにより測定し、AD 変換器によりデジタル信号に変換する (これを x とする)。フィルタ $K(z)$ により、この信号が処理され、DA 変換器を介してスピーカ B から音として出力される。このシステムの目的は、デジタルの処理系 $K(z)$ をうまく設計することで、C 点での誤差信号 $e(t)$ をなるべく小さくすることである。

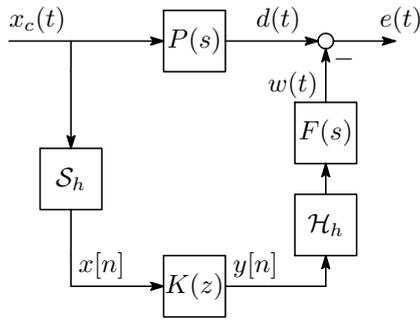


Fig. 2: アクティブ消音システムのブロック線図

このシステムのブロック線図を図 2 に示す．この図において， $P(s)$ は図 1 の A 点から C 点までの一次経路の伝達関数，また， $F(s)$ は B 点から C 点までの二次経路の伝達関数であり，ともに連続時間システムである．AD 変換器は，サンプル周期 h で動作する理想サンブラ

$$(\mathcal{S}_h x_c)[k] := x_c(kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

によってモデル化する．また，DA 変換器は周期 h で動作するゼロ次ホールド

$$\mathcal{H}_h : \ell^2 \ni y \mapsto y_c \in L^2_{[0,\infty)}, \quad y_c(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_0(t-kh)y[k],$$

とする．ここで $\beta_0(t)$ はホールド関数であり，次式で定義される．

$$\beta_0(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0, h), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本研究では，以下の問題を考える．

問題 1 次の評価関数

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)|^2 dt \quad (1)$$

を最小化する適応フィルタ

$$K[n](z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k[n]z^{-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

を求めよ．

この問題は，従来の適応フィルタの問題と異なり，連続時間の評価関数を最適化する離散時間フィルタを求める問題である．また，取り扱う信号を従来のような確率過程でなく，確定的な信号としているのも本問題の特徴である．このような問題に対するアプローチとしては，次節以降で述べるように，サンプル値制御理論が有効である．

3 リフティングによる適応アルゴリズムの設計

3.1 リフティング作用素

連続時間信号 $f(t)$ を考える． $f \in L^2_{[0,\infty)}$ とする．リフティング作用素 \mathcal{L} を次式で定義する．

$$(\mathcal{L}f)[k] := \underline{f}[k] := \{f(kh + \theta), 0 \leq \theta < h\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ただし， h はサンプリング周期である．以降，リフティングされた信号は \underline{f} のように下線を引いた記号であらわす．また，リフティングされた信号の空間を $\underline{\ell}^2$ とあらわす．すなわち，

$$\underline{\ell}^2 := \mathcal{L}L^2_{[0,\infty)} = \{\mathcal{L}f : f \in L^2_{[0,\infty)}\}.$$

この空間 $\underline{\ell}^2$ は Hilbert 空間であり，その内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{\ell}^2}$ は次式で定義される．

$$\langle u, v \rangle_{\underline{\ell}^2} := \sum_{k=0}^{\infty} \langle u[k], v[k] \rangle_{L^2_{[0,h)}}, \quad u, v \in \underline{\ell}^2$$

リフティング作用素には，次の補題 [1] に示す性質があり，本研究でひんぱんに用いる．

補題 1 リフティング \mathcal{L} は， $L^2_{[0,\infty)}$ から $\underline{\ell}^2$ への作用素で内積を保存する．すなわち，任意の $u, v \in L^2_{[0,\infty)}$ に対して，

$$\langle u, v \rangle_{L^2_{[0,\infty)}} = \langle \mathcal{L}u, \mathcal{L}v \rangle_{\underline{\ell}^2}$$

が成り立つ．さらに， \mathcal{L} は全単射であり，したがってユニタリ作用素である．

3.2 最適 Wiener 解

評価関数 (1) を前節のリフティングを用いて計算し，最適 Wiener 解を求める．最適 Wiener 解は，図 2 のプラント $P(s)$ と二次経路 $F(s)$ ，および入力 x_c のサンプル値が既知である場合の問題 1 の解である．(1) より

$$\begin{aligned} J &= \langle e, e \rangle_{L^2_{[0,\infty)}} = \langle e, \underline{e} \rangle_{\underline{\ell}^2} = \langle \underline{d} - \underline{w}, \underline{d} - \underline{w} \rangle_{\underline{\ell}^2} \\ &= \langle \underline{d}, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} - \langle \underline{w}, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} - \langle \underline{d}, \underline{w} \rangle_{\underline{\ell}^2} + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_{\underline{\ell}^2} \end{aligned}$$

ここで，内積および作用素 $\underline{F}\mathcal{H}_h := \mathcal{L}F\mathcal{H}_h$ の線形性より

$$\begin{aligned} \langle \underline{w}, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} &= \langle \underline{F}\mathcal{H}_h y, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} = \langle \underline{F}\mathcal{H}_h \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} x, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-k} x, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} = \langle \underline{d}, \underline{w} \rangle_{\underline{\ell}^2} \\ \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_{\underline{\ell}^2} &= \langle \underline{F}\mathcal{H}_h y, \underline{F}\mathcal{H}_h y \rangle_{\underline{\ell}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-k} x, \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-l} x \rangle_{\underline{\ell}^2} \end{aligned}$$

となる．これより，評価関数 J を a_m ($m = 0, 1, 2, \dots, N-1$) で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_m} &= -2 \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-m} x, \underline{d} \rangle_{\underline{\ell}^2} \\ &\quad + 2 \sum_{l=0}^{N-1} a_l \langle \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-m} x, \underline{F}\mathcal{H}_h z^{-l} x \rangle_{\underline{\ell}^2} \end{aligned}$$

となる．これより，評価関数 (1) の勾配は， $a := [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$ とおくと，

$$\frac{\partial J}{\partial a_m} = -2T_{ud} + 2T_{uu}a, \quad (4)$$

とあらわされる．ここで， T_{uu} は $\mathbb{R}^{N \times N}$ の行列， T_{ud} は \mathbb{R}^N のベクトルであり， T_{uu} の第 (k, l) 成分および T_{ud} の第 m 成分はそれぞれ，

$$(T_{uu})_{kl} := \langle z^{-k+1}\underline{u}, z^{-l+1}\underline{u} \rangle_{\ell^2},$$

$$(T_{ud})_m := \langle z^{-m+1}\underline{u}, \underline{d} \rangle_{\ell^2}.$$

で与えられる．ただし， $\underline{u} := F\mathcal{H}_h x$ であり， z^{-1} は ℓ^2 上のシフト作用素 ($\underline{u} \in \ell^2$ に対して $(z^{-1}\underline{u})[n] = \underline{u}[n-1]$) である．したがって最適 Wiener 解 a_{opt} は次の方程式 (Wiener-Hopf 方程式) の解である．

$$T_{uu}a = T_{ud} \quad (5)$$

また最適値 J_{opt} は

$$J_{\text{opt}} = \langle \underline{d}, \underline{d} \rangle_{\ell^2} - a_{\text{opt}}^\top T_{ud}$$

で与えられる．

3.3 最急降下アルゴリズム

最適 Wiener 解は，Wiener-Hopf 方程式 (5) を解くことにより求まる．本節では，この方程式を解くための最急降下法について述べる．この手法は，フィルタ係数を最急降下方向 $-\partial J/\partial a$ へ更新する手法で，次節で述べる適応アルゴリズムの基礎となるものである．最急勾配法の更新則は以下で与えられる．

$$a[n+1] = a[n] - \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\partial J}{\partial a[n]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ただし， μ は更新方向へのステップサイズパラメータであり， $\mu > 0$ とする．ここで，(4) より，上の更新則は

$$a[n+1] = a[n] + \mu(T_{ud} - T_{uu}a[n])$$

$$= (I - \mu T_{uu})a[n] + \mu T_{ud} \quad (6)$$

となる．これより，最急降下法による適応アルゴリズムは，既知の入力 x_c のサンプル値を \mathcal{H}_h でホールドし， $F(s)$ でフィルタリングした信号 $u(t)$ および， $P(s)$ の出力 $d(t)$ により計算される T_{uu} と T_{ud} を用いて更新される．

次に更新則 (6) の安定性および収束について調べる．まず，次の補題が成り立つ．

補題 2 行列 T_{uu} の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ とおく．任意の $i = 1, \dots, N$ に対して

$$0 < \lambda_i \leq \|\widehat{S}\|_\infty = \sup_{\omega \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})} \widehat{S}(j\omega), \quad (7)$$

が成り立つ．ここで，

$$\widehat{S}(j\omega) := \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(j\omega_n)^* \widehat{u}(j\omega_n),$$

$$\omega_n := \omega + \frac{2\pi}{h}n.$$

証明 まず行列 T_{uu} が正定であることを示す．0 でない任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$v^\top T_{uu} v = v^\top \left(\int_0^\infty U(\tau) U(\tau)^\top d\tau \right) v = \|v^\top U\|_{L^2_{[0, \infty)}}^2,$$

$$U(\tau) := [u(\tau), u(\tau-h), \dots, u(\tau-(N-1)h)]^\top$$

であるので T_{uu} は半正定である．さらに $L^2_{[0, \infty)}$ において， $\{u(\cdot - kh)\}_{k=0}^{N-1}$ は線形独立であるので， $v^\top U = 0$ ならば $v = 0$ ．したがって， T_{uu} は正定である．次に，

$$r_k := \int_0^\infty u(\tau) u(\tau - kh) d\tau, \quad k = 1, \dots, N$$

とおき， $u \in L^2_{[0, \infty)}$ の Fourier 変換を \widehat{u} とおくと，Parseval の等式 [11] より，

$$r_k = \langle u, u(\cdot - kh) \rangle_{L^2_{[0, \infty)}}$$

$$= \langle \widehat{u}, \widehat{u} e^{-j\omega kh} \rangle_{L^2_{(-\infty, \infty)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(j\omega)^* \widehat{u}(j\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\pi/h}^{(2n+1)\pi/h} \widehat{u}(j\omega)^* \widehat{u}(j\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-h/\pi}^{h/\pi} \widehat{u}(j\omega_n)^* \widehat{u}(j\omega_n) e^{j\omega_n kh} d\omega$$

$$= \frac{h}{2\pi} \int_{-h/\pi}^{h/\pi} \widehat{S}(j\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

ここで，行列 T_{uu} の (k, l) 成分は r_{k-l} であるから，0 でない任意のベクトル $v = [v_0, \dots, v_{N-1}]^\top \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$v^\top T_{uu} v = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v_k v_l \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{S}(j\omega) e^{j\omega(k-l)h} d\omega$$

$$= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{S}(j\omega) \widehat{V}(j\omega)^* \widehat{V}(j\omega) d\omega,$$

$$\widehat{V}(j\omega) := \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-j\omega kh}$$

また，数列 $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, 0, 0, \dots\} \in \ell^2$ の離散時間 Fourier 変換を用いると

$$v^\top v = \sum_{k=0}^{N-1} v_k^2 = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{V}(j\omega)^* \widehat{V}(j\omega) d\omega.$$

以上より，正定行列行列 T_{uu} の最大固有値を λ_{\max} とおき，対応する固有ベクトルを v とおくと，

$$\lambda_{\max} = \frac{v^\top T_{uu} v}{v^\top v}$$

$$= \frac{\frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{S}(j\omega) \widehat{V}(j\omega)^* \widehat{V}(j\omega) d\omega}{\frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{V}(j\omega)^* \widehat{V}(j\omega) d\omega}$$

$$\leq \sup_{\omega \in (-\pi/h, \pi/h)} \widehat{S}(j\omega).$$

以上より，不等式 (7) が得られる． \square

この補題を用いると，次の定理が得られる．

定理 1 ステップサイズパラメータが

$$0 < \mu < 2\|\widehat{S}\|_\infty^{-1} \quad (8)$$

を満たせば，(6) の更新則は安定であり，フィルタ係数 $a[n]$ は最適 Wiener 解 a_{opt} に収束する．

証明 更新則 (6) より, 行列 $I - \mu T_{uu}$ の固有値の絶対値が 1 未満であれば, 更新則は安定である. ここで, T_{uu} は対称行列であることを用いると, 安定であるための必要十分条件は, T_{uu} の固有値 λ_i , $i = 1, \dots, N$ を用いて, $|1 - \mu\lambda_i| < 1$ とあらわされる. したがって, 補題 2 より更新則が安定であるための十分条件が (8) で与えられることがわかる.

次に更新則が安定である場合, $c[n] = a[n] - a_{\text{opt}}$ とおき, $T_{ud} = T_{uu}a_{\text{opt}}$ の関係式を用いると,

$$c[n+1] = (I - \mu T_{uu})c[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

となる. 行列 $I - \mu T_{uu}$ の固有値の絶対値が 1 未満であるので, $c[n] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となり, フィルタ係数が最適 Wiener 解に収束することがわかる. \square

3.4 LMS タイプ適応アルゴリズム

前節で述べた最急降下法は, プラント $P(s)$ および入力 x_c が既知でなければならないが, 現実のシステムではそのような状況はあまりなく, 入出力信号の観測値を用いて最適 Wiener 解に収束する適応フィルタを用いる必要がある. そこで, 以下の LMS タイプのアルゴリズムを提案する.

$$\begin{aligned} a[n+1] &= (I - \mu T_{uu}[n])a[n] + \mu T_{ud}[n] \\ &= a[n] + \mu \hat{T}_{ue}[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, 行列 $T_{uu}[n]$ の第 (i, j) 成分 ($i, j = 1, \dots, N$), およびベクトル $T_{ud}[n]$, $\hat{T}_{ue}[n]$ の第 i ($i = 1, \dots, N$) 成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} (T_{uu}[n])_{ij} &:= \sum_{k=0}^n \langle \underline{u}[k-i+1], \underline{u}[k-j+1] \rangle_{L^2_{[0,h]}}, \\ (T_{ud}[n])_i &:= \sum_{k=0}^n \langle \underline{u}[k-i+1], \underline{d}[k] \rangle_{L^2_{[0,h]}}, \\ (\hat{T}_{ue}[n])_i &:= \sum_{k=0}^n \langle \underline{u}[k-i+1], \underline{e}[k] \rangle_{L^2_{[0,h]}} \end{aligned}$$

である.

定理 2 更新則 (9) が一様指数安定であると仮定する¹. このとき, フィルタ係数 $a[n]$ は最適 Wiener 解 a_{opt} に収束する.

証明 $c[n] := a[n] - a_{\text{opt}}$ とおき, $q[n] := T_{ud}[n] - T_{uu}[n]a_{\text{opt}}$ とおく. これらを (9) に代入すると,

$$c[n+1] = (I - \mu T_{uu}[n])c[n] + \mu q[n] \quad (10)$$

となる. ここで, $n \rightarrow \infty$ で

$$T_{ud}[n] \rightarrow T_{ud}, \quad T_{uu}[n] \rightarrow T_{uu}$$

がなりたち, 最適 Wiener 解 a_{opt} は $T_{ud} - T_{uu}a_{\text{opt}} = 0$ を満たすので, $q[n] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). また, 仮定より時

¹ある定数 $\gamma > 0$ と $0 \leq \lambda < 1$ が存在して, 任意の初期時刻 k_0 および初期値 $a[0] = a_0$ に対して, $\|a[n]\| \leq \gamma \lambda^{k-k_0} \|a_0\|$, $k \geq k_0$ が成り立つとき, システム (9) は一様指数安定であるという [8].

変システム (10) は一様指数安定であり, また入力 $q[n]$ が 0 に漸近することから,

$$c[n] = a[n] - a_{\text{opt}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

となる [8]. したがって, フィルタ係数は最適 Wiener 解に収束する. \square

アルゴリズム (9) では, 各時刻において $T_{ue}[n]$ の値を計算する必要がある. これには, 次の形の積分計算が必要となる.

$$\int_0^h u(t-mh)e(t-nh)dt, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

この積分は, 誤差信号 $e(t)$ を高速サンプルすることにより, 容易に近似計算が可能である [7].

4 おわりに

本論文では, サンプル値制御理論におけるリフティングの手法を用い, 2 次経路の連続時間特性を考慮した filtered- x 適応アルゴリズムを提案した. また, その安定性および収束性について議論した. LMS タイプの適応アルゴリズム (9) の安定条件の導出や統計的信号処理の枠組みでのリフティングアプローチは今後の課題である.

参考文献

- [1] T. Chen and B. A. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, 1995.
- [2] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Active noise control," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 10, Issue 4, pp. 12–35, 1993.
- [3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1996.
- [4] Y. Kobayashi and H. Fujioka, "Active noise control of one-dimensional duct via sampled-data \mathcal{H}_∞ control," *Proc. of the 42nd IEEE CDC*, pp. 3900–3904, 2003.
- [5] T. Meurers, S. M. Veres, and S. J. Elliott, "Frequency selective feedback for active noise control," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 22, Issue 4, pp. 32–41, 2002.
- [6] D. R. Morgan, "An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. ASSP-28, pp. 454–467, 1980.
- [7] M. Nagahara and Y. Yamamoto, "Hybrid design of filtered- x adaptive algorithm via sampled-data control theory," *IEEE International Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 2008.
- [8] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1996.
- [9] Y. Song, Y. Gong, and S. M. Kuo, "A robust hybrid feedback active noise cancellation headset," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 13, pp. 607–617, 2005.
- [10] Y. Yamamoto, "A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 39, pp. 703–712, 1994.
- [11] 山本, システムと制御の数学, システム制御情報ライブラリー 16, 朝倉書店, 1998.
- [12] 山本, 永原, "サンプル値制御によるデジタル信号処理," システム/制御/情報, Vol. 45, No. 4, 2001.
- [13] D. Yasufuku, Y. Wakasa, and Y. Yamamoto, "Adaptive digital filtering based on a continuous-time performance index," 計測自動制御学会論文集, Vol. 39, No. 6, 2003.