

不等間隔にサンプルされた信号からの H^∞ 最適復元

○和田敏裕 永原正章 山本裕 (京都大学)

Digital Signal Reconstruction from Nonuniform Samples via H^∞ Optimization

*T. Wada, M. Nagahara and Y. Yamamoto (Kyoto University)

Abstract— This paper considers a signal reconstruction problem from non-uniformly sampled signals. The reconstruction system is constructed of two systems. One is a resampler which converts non-uniform samples to uniform ones. The other is a digital filter which is aimed at reconstructing the original analog signals, and reducing noise caused by the non-uniform sampler. We design these systems by sampled-data H^∞ optimization. A design example shows the result.

Key Words: Nonuniform sampling, Signal reconstruction, Sampled-data H^∞ control

1 はじめに

離散時間システムの設計問題の応用として有用なものの中に、サンプリング周期の変換が挙げられる。近年のデジタル信号処理の発達でその応用も多岐にわたり、場合によってはリアルタイム性が求められたり、巨大なデータ量を持つ離散時間信号を短時間のうちに処理しなければならないこともある。これに対して、処理時の計算量を軽減するためにあらかじめオフラインで変換器を設計しておくことが有効である。特に音声や画像といったメディアを表す信号の場合は、あらかじめ信号の周波数モデルを仮定することができるため、より良い変換器が設計できる可能性がある。

そのようなアプローチの1つとして、変換前と変換後のサンプリング周期が整数比になっているものに関しては、サンプル値 H^∞ 制御の枠組みを用いた設計法が既に提案されている^{8,9)}。しかし、サンプリングに関してより複雑な状況を呈する問題も多くある。本研究では、そのうち不等間隔にサンプルされた離散時間信号を等間隔にリサンプルする問題を考える。

この種のリサンプル処理については、これまでも様々な手法が提案されてきた。しかしそれらは、元の曲線に完全帯域制限^{5,10,11)}や区分的多項式¹⁶⁾といった強い仮定を置いている。さもなくば、サンプリング自体に周期性などの条件を置いている^{1,17)}。また、そういった制約が無い手法の場合は、信号の長さに対して非常に大きな処理時間を必要とする³⁾。

本稿では、不等間隔にサンプルされた信号のリサンプリングに関して、代数演算と離散時間フィルタを用いた処理系を提案し、その設計法を示す。この処理系は前述のような強い仮定を必要とせず、また信号長に対して処理時間が比較的短いという特徴を持つ。

2 不等間隔なサンプリング

不等間隔なサンプリングを扱うために、いくつかの概念を導入する。

定義 1 (サンプル点集合) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し時刻 $t_k \in \mathbb{R}$ (ただし $t_k < t_{k+1}$) が与えられたとき、集合

$$\mathcal{T} := \{t_k \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\}$$

をサンプル点集合と呼ぶ。

定義 2 (不等間隔サンプリング) サンプル点集合 \mathcal{T} に対して、不等間隔サンプリング $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ を

$$(\mathcal{S}_{\mathcal{T}}u_c)[k] := (u_c(t_k), t_k), \quad t_k \in \mathcal{T}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

と定義する。

不等間隔にサンプルされた信号は、サンプリングの時刻とその時刻での信号のサンプル値の両方の情報を持つ。

本手法では、リサンプリングの処理系 \mathcal{R} を次のように構成する。

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{H}.$$

ただし、 \mathcal{K} は連続時間信号から離散時間信号への線形システムであり、 \mathcal{H} は次で定義するホールドである。

定義 3 (不等間隔ゼロ次ホールド) 不等間隔サンプリング $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ の出力 $u_g[k] = (u_k, t_k)$ に対して、システム \mathcal{H} を

$$(\mathcal{H}u_g[k])(t) := u_k, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

と定義する。これを不等間隔ゼロ次ホールドと呼ぶ。

つぎに、考慮する不等間隔信号を限定する。まず、不等間隔サンプリングされる前の連続時間信号 w_s を考える。

仮定 4 信号 w_s の周波数モデルを、厳密にプロパーな有理伝達関数 W_1 とする。

これを理想サンプリングでサンプリングし、ゼロ次ホールドした信号 w_r' と、 \mathcal{T} で不等間隔サンプリングし、不等間隔ゼロ次ホールドした信号 w_r との差を w_n とおく。すなわち、

$$w_n := w_r' - w_r = (\mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \mathcal{S}_h^{\text{id1}} - \mathcal{H}\mathcal{S}_{\mathcal{T}})w_s.$$

信号 w_r' , w_r および誤差 w_n の例をそれぞれ、Fig. 1, Fig. 2 および Fig. 3 に示す。この誤差をノイズとみなし、次のような仮定を置く。

仮定 5 信号 w_n の周波数モデルを、プロパーな有理伝達関数 W_2 とする。

仮定 4, 仮定 5 の下で、 \mathcal{K} の設計は文献⁹⁾ のような、ノイズ付加時の信号復元問題とみなすことができ、次のように定式化できる。

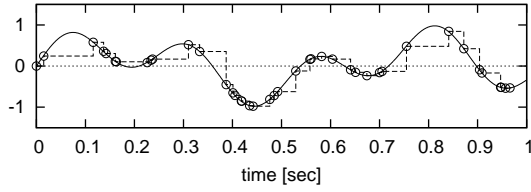


Fig. 1: w_s (実線) と w_r (破線) の例

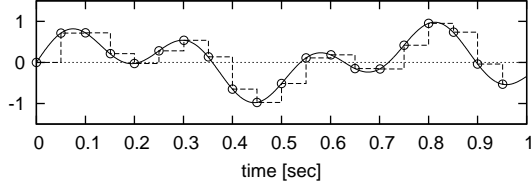


Fig. 2: w_s (実線) と w'_r (破線) の例

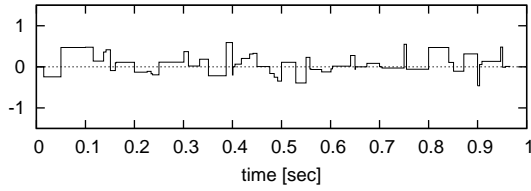


Fig. 3: $w_r - w'_r$ の例

問題 6 出力のサンプル周期 h , 許す遅れ N , 及び $W_1, W_2, \gamma_r > 0$ が与えられたとき,

$$\sup_{r \in L^2} \frac{\|(\mathcal{D}_h^N - \mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \mathcal{K} \mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \mathcal{S}_h^{\text{idl}}) \mathcal{W}_1 r\|_2}{\|r\|_2} < \gamma_r,$$

$$\sup_{n \in L^2} \frac{\|\mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \mathcal{K} \mathcal{W}_2 n\|_2}{\|n\|_2} < \gamma_n$$

の下で γ_n を最小化する \mathcal{K} を求めよ。ただし, \mathcal{D}_h は時間 h の遅れ作用素, $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ は伝達関数 W_1, W_2 によってあらわされる入出力作用素とする。

γ_n に関する最小化問題は, ある γ_n に関する可解問題の反復によって解くことができる。また, γ_r, γ_n はともに $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ に含めることができるので, 以下では問題 6 として $\gamma_r = \gamma_n = 1$ に関する可解問題を考える。

3 主要結果

問題 6 は Periodic な系であり, サンプル値制御理論⁴⁾ の枠組みを用いて取り扱うことができる。システム $\hat{\mathcal{G}}_u$ を

$$\hat{\mathcal{G}}_u := \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathcal{G}}_{r11} & 0 & \Delta \mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \\ \hat{\mathcal{G}}_{r21} & \hat{\mathcal{G}}_{n21} & 0 \end{bmatrix}$$

とおく。ただし, \mathcal{L}_h をリフティング作用素¹⁹⁾, \mathcal{U} を離散時間の 1 ステップの遅れ作用素として,

$$\hat{\mathcal{G}}_{r11} := -\mathbf{C}_{w1} \mathcal{U}^N \mathcal{W}_p \mathbf{B}_{w1} - \mathbf{D}_{w1} \Pi_L \mathcal{U}^N \Pi_R,$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{r21} := \mathcal{H}_h^{\text{ZO}} \mathcal{S}_h^{\text{idl}} \mathbf{C}_{w1} \mathcal{W}_p \mathbf{B}_{w1},$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{n21} := \|\mathcal{H}_h^{\text{ZO}}\| \|\Delta \mathcal{H}_h^{\text{ZO}}\|^{-1} \mathcal{W}_2,$$

$$\Delta := (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{w1} (\mathbf{I} - \Pi_L \Pi_R) \mathbf{D}_{w1}^*)^{-1/2},$$

$$\Pi_L := \mathbf{B}_{w1} (\mathbf{B}_{w1} \mathbf{B}_{w1}^*)^\dagger, \quad \Pi_R := \mathbf{B}_{w1}^*,$$

$$\hat{\mathcal{W}}_p(z) := \begin{bmatrix} A_{w1\ell} & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{w1\ell} & \mathbf{B}_{w1} \\ \mathbf{C}_{w1} & \mathbf{D}_{w1} \end{bmatrix} := \hat{\mathcal{W}}_1(z),$$

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{L}_h \mathcal{W}_j \mathcal{L}_h^{-1}, \quad (j = 1, 2),$$

$$\mathcal{S}_h^{\text{idl}} := \mathcal{S}_h^{\text{idl}} \mathcal{L}_h^{-1}, \quad \mathcal{H}_h^{\text{ZO}} := \mathcal{L}_h \mathcal{H}_h^{\text{ZO}}$$

とする¹。 $\hat{\mathcal{G}}_u$ は有限次元の状態空間の実現を持ち,

$$\begin{bmatrix} A_{u\ell} & \mathbf{B}_{u1} & 0 \\ \mathbf{C}_{u1} & 0 & \mathbf{D}_{u12} \\ \mathbf{C}_{u2} & \mathbf{D}_{u21} & 0 \end{bmatrix} := \hat{\mathcal{G}}_u(z)$$

とおく。

さて H^∞ 制御問題の正則性に関する仮定¹³⁾

仮定 7 任意の $\theta \in [0, 2\pi)$ において

$$\begin{bmatrix} A_{u\ell} - e^{j\theta} I & 0 \\ \mathbf{C}_{u1} & \mathbf{D}_{u12} \end{bmatrix} \text{は左可逆. かつ}$$

$$\begin{bmatrix} A_{u\ell} - e^{j\theta} I & \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{C}_{u2} & \mathbf{D}_{u21} \end{bmatrix} \text{は右可逆.}$$

の下で, 問題 6 が可解ならば \mathcal{K} は離散時間システム \mathcal{K}_d 及び積分型サンプラ $\mathcal{S}_h^{\text{int}}$ により

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_d \mathcal{S}_h^{\text{int}}$$

と構成できる¹⁸⁾。仮定 7 は, 個々の θ については文献¹²⁾ の手法を用いることにより判定できる。

さて, ここで次のようなサンプラを定義しよう。

定義 8 任意の $\theta \in \mathbb{R}_+$ に対して, 作用素 $\mathcal{S}_\theta^{\text{step}}$ を

$$\mathcal{S}_\theta^{\text{step}} : L^2 \ni u_c \mapsto v_d \in \ell^2, \quad v_d[k] = \int_0^\theta u(k\theta + \sigma) d\sigma$$

と定義する。

この $\mathcal{S}_\theta^{\text{step}}$ を用いて $\mathcal{S}_h^{\text{int}}$ を $M_\phi \mathcal{U} \mathcal{L}_L \mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}}$ と近似する。 M_ϕ は定数行列であり, \mathcal{L}_L は L 倍の離散時間リフティング作用素⁴⁾ である。これは積分型サンプラの区分布積法による近似に相当し, 問題 6 が可解ならば十分な大きな L に対してこの近似は収束する¹⁸⁾。

このとき, 離散時間システム \mathcal{K} 及び行列 M_ϕ は, $\mathcal{K}_e := \mathcal{K} M_\phi$ として同時に求めることができる。すなわち, 問題 6 は問題 9 に帰着する。

問題 9 Fig. 4 において,

$$\sup_{\check{r} \in \ell^2} \frac{\|\check{y}\|_2}{\|\check{r}\|_2} < 1, \quad \sup_{\check{n} \in \ell^2} \frac{\|\check{y}\|_2}{\|\check{n}\|_2} < 1$$

を満たす \mathcal{K}_e を求めよ。ただし Fig. 4 中

$$\mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} := \mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} \mathcal{L}_{h/L}^{-1}, \quad \mathcal{W}_{2f} := \mathcal{L}_{h/L} \mathcal{W}_2 \mathcal{L}_{h/L}^{-1}$$

である。

Fig. 4 中, 網掛け部分は全体として時不変かつ因果的な系になっていることに注意すると, 文献¹⁴⁾ の手法により等価な有限次元離散時間系を得ることができる。結果, 問題は次の問題に帰着する。

¹上付き \dagger は Moore-Penrose 擬逆行列を表す。また, \mathcal{G} をシステムとして, $\hat{\mathcal{G}}$ は \mathcal{G} に対応する伝達関数行列を表す。

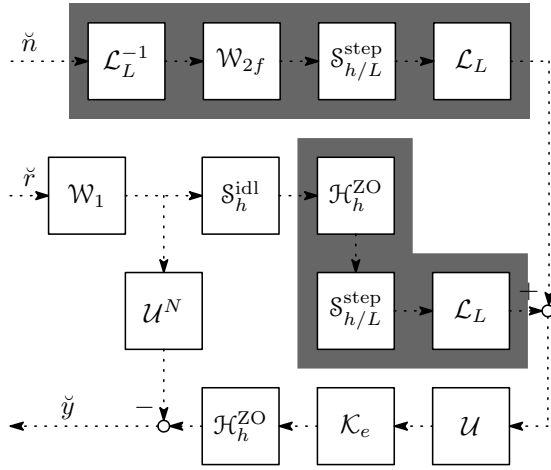


Fig. 4: 設計問題

問題 10 システム \mathcal{G}_e を

$$\mathcal{G}_e := \begin{bmatrix} \mathcal{U}^{N-1} \mathcal{G}_{re11} & 0 & D_{re12} \\ \mathcal{G}_{re21} & \hat{\mathcal{G}}_{ne} & 0 \end{bmatrix}$$

として

$$\left\| \mathcal{F}_\ell(\hat{\mathcal{G}}_e, \hat{\mathcal{K}}_e) \right\|_\infty < 1$$

を満たす因果的かつ時不変な線形システム \mathcal{K}_e を求めよ。ただし

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{G}}_{re11} \\ \hat{\mathcal{G}}_{re21} \end{bmatrix} (z) := \begin{bmatrix} A_r & B_{re1} \\ C_{re1} & D_{re11} \\ (h/L)C_{w1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ (h/L)C_{w1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ne} := h \|D_{re12}\|^{-1} \mathcal{G}_{ne}, \quad A_r := \Psi_{b22},$$

$$D_{re11} := D_{ra} B_{re1}, \quad B_{re1} B_{re1}^\top := \Psi_{b23} \Psi_{b22}^\top,$$

$$\begin{bmatrix} C_{re1}^\top \\ D_{ra}^\top \\ D_{re12}^\top \end{bmatrix} [C_{re1} \quad D_{ra} \quad D_{re12}]$$

$$:= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12}^\top & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13}^\top & \Sigma_{23}^\top & \Sigma_{33} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11} := \Sigma_{12}(\Psi_{b22} - \Psi_{a22}) - \Psi_{b22}^\top \Psi_{a32},$$

$$\Sigma_{12} := (I - \Psi_{b22}^\top \Psi_{b33}) \Psi_{a23}^\dagger,$$

$$\Sigma_{13} := \Sigma_{12}(\Psi_{b24} - \Psi_{a24}) - \Psi_{b22}^\top \Psi_{a34},$$

$$\Sigma_{22} := \Psi_{b33} \Psi_{b23}^\dagger - \Psi_{a33} \Psi_{a23}^\dagger,$$

$$\Sigma_{23} := (\Psi_{a13} - \Psi_{b13} \Psi_{b22}^\top \Psi_{a33}) \Psi_{a23}^\dagger,$$

$$\Sigma_{33} := \Sigma_{23}(\Psi_{b24} - \Psi_{a24}) + \Psi_{a14} - \Psi_{b13} \Psi_{b22}^\top \Psi_{a34},$$

$$\Psi_a := e^{h\Phi_a}, \quad \Psi_b := e^{h\Phi_b},$$

$$\Phi_a := \begin{bmatrix} 0 & -C_{w1} & 0 & I \\ 0 & A_w & B_{w1} B_{w1}^\top & 0 \\ 0 & -C_{w1}^\top C_{w1} & -A_{w1}^\top & C_{w1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_b := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_w & B_{w1} B_{w1}^\top & 0 \\ 0 & 0 & -A_{w1}^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{ne}(z) := \text{dflift}_L \left(\begin{bmatrix} A_n & B_{ne} \\ C_n & D_{ne} \end{bmatrix} \right), \quad A_n := \Psi_{c11},$$

$$B_{ne} B_{ne}^\top := \Psi_{c11} \Psi_{c12}^\top, \quad C_{ne} := \Psi_{d21},$$

$$D_{ne} := \Psi_{d21} \Psi_{d14}^\top + \Psi_{d22} \Psi_{d24}^\top,$$

$$\Psi_c := e^{(h/L)\Phi_c}, \quad \Psi_c' := e^{-(h/L)\Phi_c},$$

$$\Phi_c := \begin{bmatrix} A_{w2} & -B_{w2} B_{w2}^\top \\ 0 & -A_{w2}^\top \end{bmatrix},$$

$$\Psi_d := e^{(h/L)\Phi_d}, \quad \Psi_d' := e^{-(h/L)\Phi_d},$$

$$\Phi_d := \begin{bmatrix} A_{w2} & 0 & -B_{w2} B_{w2}^\top & -B_{w2} D_{w2}^\top \\ C_{w2} & 0 & -D_{w2} B_{w2}^\top & -D_{w2} D_{w2}^\top \\ 0 & 0 & -A_{w2}^\top & -C_{w2}^\top \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_{w1} & B_{w1} \\ C_{w1} & D_{w1} \end{bmatrix} := W_1(s),$$

$$\begin{bmatrix} A_{w2} & B_{w2} \\ C_{w2} & D_{w2} \end{bmatrix} := W_2(s)$$

である。dflift_L は伝達関数に対する離散時間リフティング⁴⁾を表す。

問題 10 は、一般的な離散時間 H^∞ 制御問題であり、様々な解法が知られている⁶⁾。また、MATLAB 等を用いると数値的に解くことができる^{2,7)}。式中の行列の指数の計算は、効率の良い計算方法が知られている¹⁵⁾。

4 サンプラーの実装

不等間隔にサンプルされた信号に対する処理系は $\tilde{\mathcal{K}}\mathcal{H} := \mathcal{K}_e \mathcal{U}_L \mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} \mathcal{H}$ であるが、 $\mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} \mathcal{H}$ は \mathcal{T} を入力信号のサンプリング集合として、

$$\{t_{i_k}, \dots, t_{i_k}\} := \left[\frac{h}{L}k, \frac{h}{L}(k+1) \right) \cap \mathcal{T}$$

としたとき

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} \mathcal{H} u_g)[k] &= \left(t_{i_k} - \frac{h}{L}k \right) u_g[\hat{l}_k - 1] \\ &+ \sum_{l=i_k}^{i_k-1} ((t_{l+1} - t_l) u_g[l]) \\ &+ \left(\frac{h}{L}(k+1) - t_{i_k} \right) u_g[\hat{l}_k] \end{aligned}$$

のように計算できる。

$\mathcal{S}_{h/L}^{\text{step}} \mathcal{H}$ は 1 ステップ分の非因果性を含んでいるが、その直後に接続された遅れにより、システム全体は因果的になっている。

\mathcal{K}_e は通常の離散時間のシステムであり、実装可能である。

5 数値例

本稿では、例として倍率 $3/\pi$ の解像度変換器を設計した。こういった、無理数比や公倍数の大きな比の解像度変換は、既存の手法による因果的な処理が困難である。

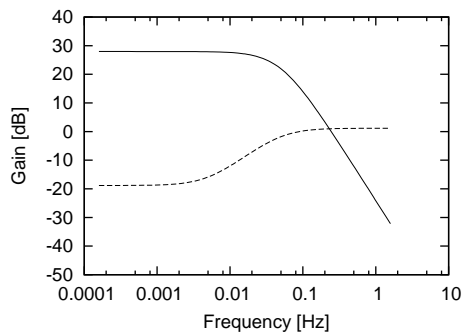


Fig. 5: ゲイン線図. 実線: W_1 , 破線: W_2

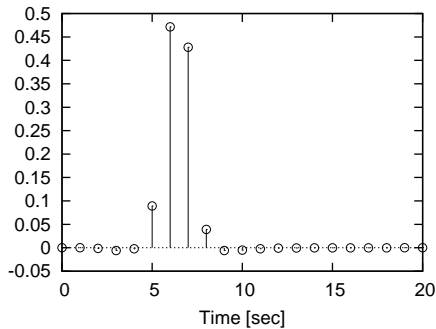


Fig. 6: $\tilde{\mathcal{K}}$ のインパルス応答

\mathcal{K}_e の設計には, $h = 1, N = 6, L = 10$ とし, W_1 と W_2 には Fig. 5 のような伝達関数を用いた. 得られた $\tilde{\mathcal{K}}$ のインパルス応答を Fig. 6 に示す.

さて, この処理系を用いて Fig. 7 を $3/\pi$ 倍解像度変換したものが Fig. 8 である.

6 終わりに

不等間隔にサンプルされた信号からの H^∞ 最適復元法を提案した. 問題は, 離散時間の H^∞ 制御問題に帰着する. さらに, 提案法を用いれば従来の手法では困難な解像度変換なども, 高品位かつ高速に実行できる.

参考文献

- 1) A. Aldroubi and K. Gröchenig: Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces, *SIAM Review*, **43**-4, 585/620 (2001)
- 2) G. Balas and R. Chiang and A. Packard and M. Safonov: *Robust Control Toolbox Version 3*, The MathWorks (2005)

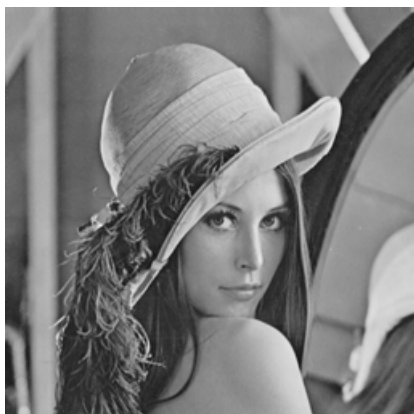


Fig. 7: 原画像 (lena)

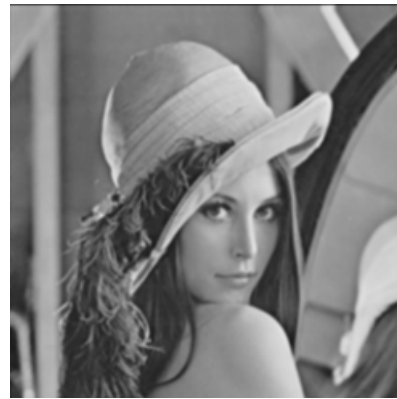


Fig. 8: $3/\pi$ 倍解像度変換画像

- 3) D. Capel and A. Zisserman: Computer vision applied to super resolution, *IEEE Signal Processing Magazine*, **20**-3, 75/86 (2003)
- 4) T. Chen and B. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)
- 5) Y. C. Eldar and A. V. Oppenheim: Filterbank reconstruction of bandlimited signals from nonuniform and generalized samples, *IEEE Trans. Signal Processing*, **48**-10, 2864/2875 (2000)
- 6) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H^∞ control, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, **4**, 421/448 (1994)
- 7) P. Gahinet and A. Nemirovski and A. J. Laub and M. Chilali: *LMI Control Toolbox*, The MathWorks (1995)
- 8) H. Ishii, Y. Yamamoto, and B. A. Francis: Sample-rate conversion via sampled-data H^∞ control, *In Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control*, 3440/3445 (1999)
- 9) 掛水: サンプル値 H^∞ 制御理論によるデジタル画像復元, 修士論文, 京都大学 (2005)
- 10) J. Kybic, T. Blu, and M. Unser: Generalized sampling: A variational approach—Part I: Theory, *IEEE Trans. Signal Processing*, **50**-8, 1965/1976 (2002)
- 11) P. Marziliano and M. Vetterli: Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations, *IEEE Trans. Signal Processing*, **48**-12, 3462/3471 (2000)
- 12) L. Mirkin and Z. J. Palmor: A new representation of the parameters of lifted system, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **44**-4, 833/840 (1999)
- 13) L. Mirkin and H. P. Rotstein and Z. J. Palmor: H^2 and H^∞ design of sampled-data system using lifting. Part I: General framework and solutions, *SIAM J. Control Optim.*, **38**-1, 175/196 (1999)
- 14) L. Mirkin and G. Tadmor: Yet Another Discretization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **48**-5, 891/894 (2003)
- 15) C. Moler and C. V. Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later, *SIAM Review*, **45**-1, 3/49 (2003)
- 16) M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden: B-spline signal processing: Part I—Theory, *IEEE Trans. Signal Processing*, **41**-2, 821/833 (1993)
- 17) M. Unser and J. Zerubia: A generalized sampling theory without band-limiting constraints, *IEEE Trans. Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing*, **45**-8, 959/969 (1998)
- 18) 和田: 不等間隔にサンプルされた信号からの H^∞ 最適復元, 修士論文, 京都大学 (2007)
- 19) Y. Yamamoto: A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **39**-4, 703/713 (1994)