

サンプル値 H^∞ 制御による繰り返し制御

Repetitive Control via Sampled-Data H^∞ Control

ジョージ オオイ (テキサス・インスツルメンツ), 永原 正章 (京都大学), 山本 裕 (京都大学)

G. Ooi*, M. Nagahara**, Y. Yamamoto**,
Texas Instruments*, Kyoto University**

Abstract Repetitive control has been implemented in various industrial applications to allow systems to track or reject unknown periodic signals with a fixed period. Repetitive controllers are usually implemented by digital computers, in which undesired ripples may occur between sampling instants. In this work, we approach this problem via sampled-data H^∞ control. We show that our approach significantly attenuates the ripples without sacrificing the tracking performance.

1 はじめに

繰り返し制御とは、周期的な参照信号への追従や周期的な外乱の抑制を目的とした制御であり、さまざまな応用がある [7]。例えば、陽子シンクロトロン加速器の電源制御 [4] や、周期的な動作を行なうロボットマニピュレータの制御 [8] などである。

実際の応用では、デジタル機器を用いて繰り返し制御器を実装することが多い。この場合、繰り返し制御系を離散時間制御系とみなして、解析や設計がおこなわれる [7]。しかしプラントは一般に連続時間系であり、その連続時間出力信号がサンプル点間でも参照信号に追従しているかどうかは、離散時間制御系での解析だけではとらえられない。実際、デジタル繰り返し制御系では、出力信号のサンプル点間に定常リップルが生じることが知られている [7, 3]。

そこで本論文では、繰り返し制御系の設計にサンプル値制御理論 [1] を導入する。サンプル値制御理論を用いることによって、サンプル点間の応答を含めた設計が可能となり、定常リップルの低減が可能となる。このようにサンプル値制御理論を繰り返し制御に導入する研究は、誘導パワーノルムを用いる方法 [6] や周期時変制御器による方法 [5] が知られているが、本研究では、リップルの低減にサンプル値 H^∞ 最適制御を用い、線形時不変の制御器を求める方法を提案する。また、最適な制御器を求める手法としてファーストサンプル・ファーストホールド近似手法 [11] を導入し、近似離散時間系の設計公式を導出する。さらに、設計例によって提案手法の有効性を示す。

2 問題設定

図 1 の繰り返し制御系を考える。ここで、 r は周期的な参照信号 (周期を T とする)、 y はプラント出力であ

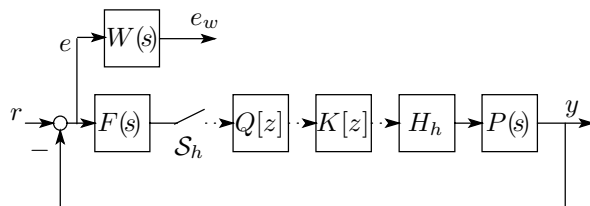


図 1: 繰り返し制御系

る。 $P(s)$ は連続時間で動作するプラント、 $F(s)$ はサンプリングのためのアンチエイリアシングフィルタ、 $W(s)$ は追従誤差 e を評価する際の周波数重み関数とする。プラント $P(s)$ は厳密にプロパーとし、フィルタ $F(s)$ および重み関数 $W(s)$ は厳密にプロパーかつ安定とする。また、 S_h と H_h はそれぞれ、サンプル周期 h の理想サンプルおよびゼロ次ホールドである。

図 1 のブロック線図において、制御器は二種類ある。一つは次の $Q[z]$ であらわされる繰り返し制御器である。

$$Q[z] = \frac{1}{z^M - 1}. \quad (1)$$

ここで M は $M = Th$ を満たす自然数である。もう一つの制御器は、フィードバック系を安定化し、トラッキング性能を改善する $K[z]$ である。ここで、 $K[z]$ はプロパーで線形時不変とする。

この制御系における制御目的は次のとおりである。

- 定常トラッキング誤差 $e(t)$ をサンプル点上 $t = kh$ ($k \in \mathbb{Z}$) で 0 にする。
- サンプル点間のリップルを減少させる。

一つ目の制御目的は、繰り返し制御器 (1) によって達成される。すなわち次の定理が成り立つ。

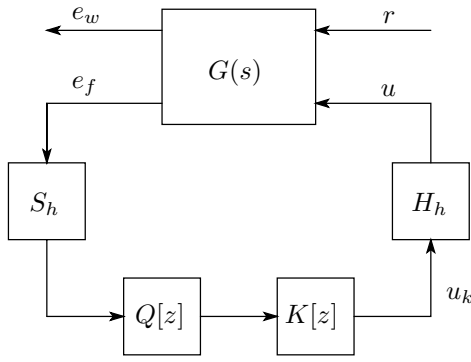


図 2: サンプル値系 \mathcal{T}

定理 1 制御器 $K[z]$ によって、図 1 のフィードバック系が内部安定化されているものとする。このとき、

$$\lim_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \rightarrow \infty}} e(kh) = 0$$

が成り立つ。

証明は付録参照。二つ目の制御目的を達成するために、サンプル値 H^∞ 制御により制御器 $K[z]$ を設計する。すなわち、設計問題を以下のように設定する。

問題 1 図 1 において r から e_w までのシステムを \mathcal{T} とおく。フィードバック系を内部安定化し、かつ

$$\|\mathcal{T}\| := \sup_{r \in L^2} \frac{\|\mathcal{T}r\|}{\|r\|}$$

を最小化する線形時不変の制御器 $K[z]$ を求めよ。

3 サンプル値 H^∞ 制御による定常リップル低減

プラント $P(s)$ 、フィルタ $F(s)$ 、重み関数 $W(s)$ の状態空間実現をそれぞれ

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad F(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & 0 \end{array} \right],$$

$$W(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_W & B_W \\ \hline C_W & 0 \end{array} \right]$$

とおく。図 1 のフィードバック系を図 2 の一般化プラント形式に書き直す。ここで

$$G(s) = \begin{bmatrix} W(s) & -W(s)P(s) \\ F(s) & -F(s)P(s) \end{bmatrix} \\ =: \left[\begin{array}{c|cc} A_c & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

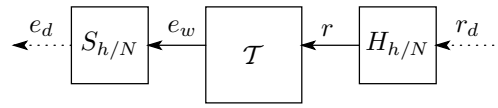


図 3: FSFH 近似

$$A_c = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -B_F C & A_F & 0 \\ -B_W C & 0 & A_W \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_F \\ B_W \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_W \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_F & 0 \end{bmatrix}$$

である。 (A_c, B_2) を可安定、 (C_2, A_c) を可検出とする。

問題 1 のサンプル値 H^∞ 最適化制御問題を解くために、ファストサンプル・ファストホールド (FSFH) 手法 [11] を導入する。FSFH 手法はサンプル値制御系を離散時間系で近似する方法であり、その手順は以下のとおりである (図 3 参照)。

- 連続時間入力 r をサンプル周期 h/N のゼロ次ホールドを用いて離散化する。
- 連続時間出力 e_w をサンプル周期 h/N の理想サンプラを用いて離散化する。

ここで N は正の整数である。十分大きな N にたいして、離散化された信号は連続時間信号の良い近似となり、サンプル点間のリップルをとらえることが可能となる。さらに次の定理を得る。

定理 2 図 2 のサンプル値系 \mathcal{T} にたいして、離散時間系 $\{T_N : N = 1, 2, \dots\}$ が存在して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T\| = \|T_N\|$$

が成り立つ。

証明は文献 [11] を参照。離散時間系 T_N の状態空間実現は以下のように与えられる (図 4 を参照)。

$$T_N = \mathcal{F}_l(G_{dN}, KQ), \\ G_{dN}[z] = \left[\begin{array}{c|cc} A_d & B_{1dN} & B_d \\ \hline C_{1dN} & D_{11dN} & D_{12dN} \\ C_2 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

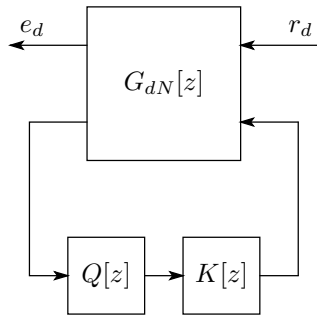


図 4: 近似離散時間系 T_N

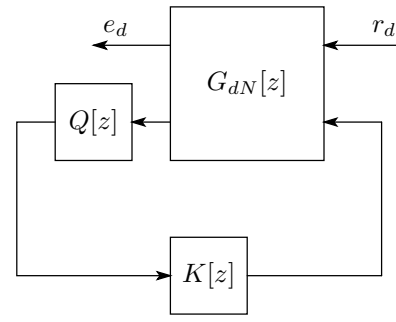


図 5: 制御器 $K[z]$ 設計のための離散時間系

$$A_d := e^{A_c h}, \quad B_d := \int_0^h e^{A_c t} B_2 dt,$$

$$B_{1dN} := \begin{bmatrix} A_{dN}^{N-1} B_{dN} & A_{dN}^{N-2} B_{dN} & \dots & B_{dN} \end{bmatrix},$$

$$C_{1dN} := \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_{dN} \\ \vdots \\ C_1 A_{dN}^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$D_{11dN} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 B_{dN} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 A_{dN}^{N-2} B_{dN} & C_1 A_{dN}^{N-3} B_{dN} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12dN} := \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B_{dN} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-2} C_1 A_{dN}^i B_{dN} \end{bmatrix},$$

$$A_{dN} := e^{A_c h/N}, \quad B_{dN} := \int_0^{h/N} e^{A_c t} B_1 dt.$$

図 4 における繰り返し制御器 $Q[z]$ をプラント側に移動させ、図 5 を得る。これにより、線形時不変の最適制御器 $K[z]$ は、標準的な離散時間 H^∞ 設計のアルゴリズムを用いて求めることができる。

4 設計例

ここでは、提案手法の有効性を確かめるために、従来法（離散時間 LQR 設計 [7]）と比較する。

プラント $P(s)$ 、フィルタ $F(s)$ 、重み関数 $W(s)$ を次のように設定する。

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(3s+1)}, \quad F(s) = \frac{20}{0.01s+1},$$

$$W(s) = \frac{1}{2s+1}.$$

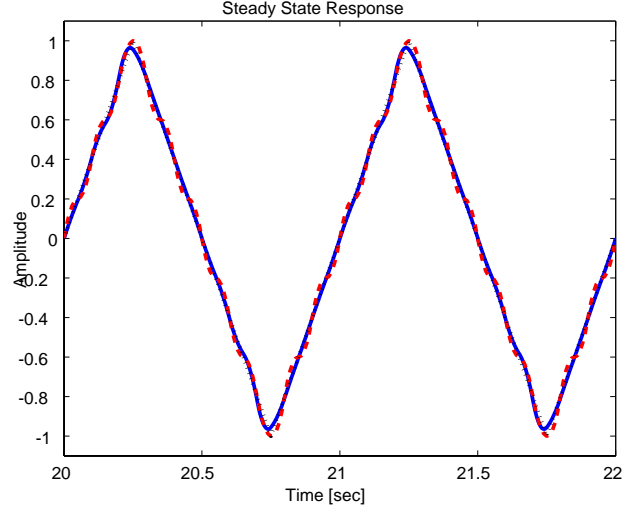


図 6: 定常応答: 参照信号 (点線), 提案法 (実線), 従来法 (破線)

また参照信号 r を次の周期信号とする。

$$r(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1/4, \\ -4t + 2, & 1/4 \leq t < 3/4, \\ 4t - 4, & 3/4 \leq t < 1 \end{cases}$$

ここで、参照信号の周期は $T = 1.0$ [sec] である。サンプリング周期を $h = 0.05$ [sec] とし ($M = T/h = 20$)、FSFH 近似の分割数を $N = 4$ とする。

図 6 はプラント出力 $y(t)$ の定常応答、図 7 は定常誤差 $e(t)$ (ともに $20 \leq t \leq 22$) である。従来法では、サンプル点間のリップルが見られるが、提案法のサンプル値設計によってリップルが低減されていることがわかる。

5 おわりに

本論文では、繰り返し制御系の設計にサンプル値 H^∞ 最適制御を用いることを提案し、FSFH 近似離散時間系

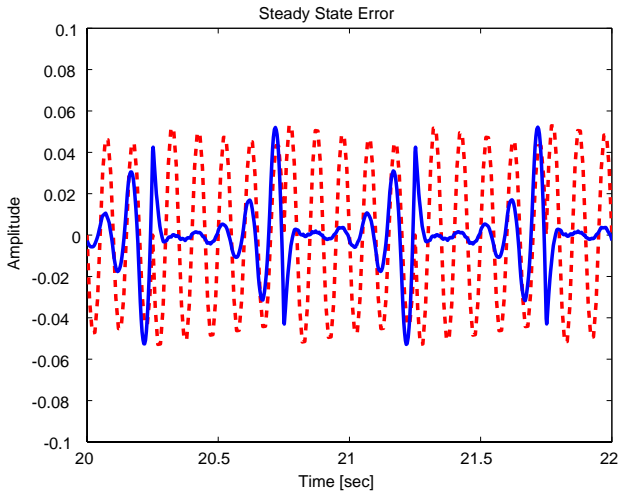


図 7: 定常誤差: 提案法 (実線), 従来法 (破線)

の公式を与えた。また設計例によって、提案手法の有効性を示した。

A 定理 1 の証明

周期 T の参照信号 $r(t)$ を Fourier 級数展開する。

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

インパルス変調公式 [10] を用いると、この周期信号にたいする出力 $y(t)$ の定常応答 $y_{ss}(t)$ は次式で与えられる:

$$y_{ss}(t) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(j\omega_{n,m}) H_h(j\omega_{n,m}) S_d(e^{jm\omega_0 h}) \tilde{K}(e^{jm\omega_0 h}) c_m e^{j\omega_{n,m} t}, \quad (2)$$

$$\tilde{K}(z) := K(z)Q(z), \quad S_d(z) := [1 + \tilde{K}(z)P_d(z)]^{-1},$$

$$P_d(z) := (S_h P \mathcal{H}_h)(z) = \left[\begin{array}{c|c} e^{Ah} & \int_0^h e^{At} B dt \\ \hline C & 0 \end{array} \right],$$

$$H_h(s) := \frac{1 - e^{-sh}}{s}, \quad \omega_{n,m} := m\omega_0 + \frac{2\pi n}{h}.$$

ここで次の補題が成り立つ。

補題 1

$$S_d(e^{j\omega_0 h}) \tilde{K}(e^{j\omega_0 h}) = P_d(e^{j\omega_0 h})^{-1}.$$

証明は省略する。(2) に $t = kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を代入し、補題 1 を用いて整理すると

$$y_{ss}(kh) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 kh} = r(kh)$$

が得られる。すなわち定理 1 が成り立つ。

参考文献

- [1] T. Chen and B. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)
- [2] G. F. Franklin and A. Emami-Naeini: Design of ripple-free multivariable robust servomechanisms, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-31**, pp. 661–664 (1986)
- [3] S. Hara, M. Tetsuka and R. Kondo: Ripple attenuation in digital repetitive control systems, *Proc. 29th IEEE CDC*, pp. 1679–1684 (1990)
- [4] T. Inoue, M. Nakano, and S. Iwai: High accuracy control of servomechanism for repeated contouring, *Proc. 10th Annual Symp. Incremental Motion Control, Systems, and Devices*, pp. 258–292 (1981)
- [5] H. Ishii and Y. Yamamoto: Periodic compensation for sampled-data H^∞ repetitive control, *Proc. 37th IEEE CDC*, pp. 331–336 (1998)
- [6] A. Langari, B. A. Francis: Sampled-data repetitive control systems, *Proc. ACC*, pp. 3234–3235 (1998)
- [7] 中野, 井上, 山本, 原: 繰り返し制御, 計測自動制御学会編, コロナ社 (1989)
- [8] T. Omata, S. Hara and M. Nakano: Nonlinear repetitive control with applications to trajectory control manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **Vol-4**, pp. 631–652 (1987).
- [9] S. Urikura and A. Nagata: Ripple-free deadbeat control for sampled data systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-32**, pp. 474–482 (1987)
- [10] Y. Yamamoto and M. Araki: Frequency responses for sampled-data systems — their equivalence and relationships, *Linear Algebra and Its Applications*, **205-206**, pp. 1319–1339 (1994)
- [11] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems, *Automatica*, **35-1**, pp. 729–734 (1999)