

時変通信路にたいする通信システムの最適設計

Optimal Design of Communication Systems with Time-Varying Channels

安福大輔 (新日本製鉄), 永原 正章 (京都大学), 山本 裕 (京都大学)
D. Yasufuku*, M. Nagahara**, Y. Yamamoto**,
Nippon Steel Corporation*, Kyoto University**

Abstract The paper proposes a new design methodology for transmitting/receiving filter, based on the sampled-data H^∞ control theory. The channel we consider is time-varying, which is modeled as the convex hull of several time-invariant channels. The sampled-data system is discretized by fast-sampling method, and the problem is described as Linear Matrix Inequalities (LMIs) by using the bounded real lemma.

1 はじめに

インターネットや携帯電話等の急速な普及によりデジタル通信の技術はますます重要になっている [4]. こ

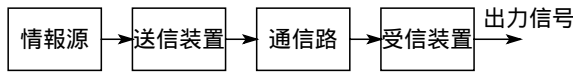


図 1: デジタル通信システム .

のデジタル通信における信号の流れを図 1 に示す . 音声や画像などの情報は , 送信装置によってデジタル信号へと変換され通信路へと伝送される . 通信路を通ることにより歪みや雑音を加えられた信号は受信装置によって復元され復元信号となる .

近年 , サンプル値制御理論を用いることで , 情報源の連続時間特性を考慮に入れた送信装置 , 受信装置の設計が可能となり , その有効性が確認されている [3] .

しかし , これらの結果は通信路の時不変性を仮定するため , 例えば携帯電話や汎用通信回線のように通信路が時間変動する場合や不確かさを含む場合には必ずしも性能を補償するとは限らない .

そこで本論文では時変通信路のモデルとして時不変離散時間システムの時変凸結合を採用する . これは任意の時変 FIR フィルタを含むクラスであることから時変通信路のモデルを十分に表すことができると考えられる . このような通信路モデルのもとで , サンプル値 H^∞ 最適化を用いた送受信フィルタの設計を行う . このサンプル値フィルタ設計問題は , ファーストサンプル・ファーストホールド近似 [5] をもちいることにより , 離散時間の

設計問題に帰着でき , さらにポリティピック LPV システムの有界実補題 [1] により線形行列不等式に帰着される .

2 問題設定

デジタル通信システムのブロック線図を図 2 に示す . ここでは簡単のため 1 入力 1 出力の場合を考える .

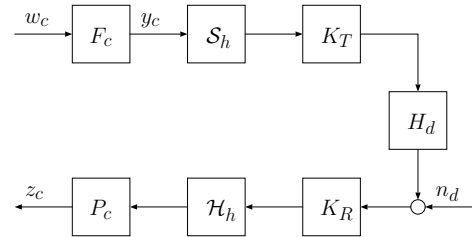


図 2: デジタル通信システム .

連続時間信号 w_c にたいして連続時間低域通過フィルタ F_c を作用させ連続時間信号 y_c を得る . ここで F_c は伝送すべき元信号の先見情報であると考えられる . 連続時間信号 y_c は周期 h で動作する理想サンプラ S_h によって離散時間信号に変換され , 送信フィルタ $K_T(z)$ から通信路 H_d に送信される .

通信路の特性は一般には非線型現象も含み線形時不変モデルとして記述するのは困難である . そこで本論文では , 時変性並びに不確かさも含むモデルとして r 個の離散時間システム H_{d1}, \dots, H_{dr} の凸結合としてあらわすことができる場合を考える :

$$H_d = \sum_{i=1}^r \theta_i H_{di}.$$

ここで $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)$ は時変パラメータ

$$\theta \in \Theta := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \theta_i = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, \dots, r \right\}$$

である。

通信路 H_d の後には雑音 n_d が付加される。これは実際の通信路における雑音や同定モデルとのモデル化誤差をあらわす。雑音を含んだ受信信号は受信フィルタ K_R を通り、周期 h で動作する零次ホールド \mathcal{H}_h により連続時間信号に変換された後、連続時間低域通過フィルタ F_c によって平滑化されて出力信号 z_c となる。

設計対象である送受信フィルタ K_T, K_R はそれぞれ n_T, n_R 次の FIR フィルタとする:

$$K_T(z) := \sum_{j=0}^{n_T} \alpha_{T,j} z^{-j}, \quad K_R(z) := \sum_{j=0}^{n_R} \alpha_{R,j} z^{-j}.$$

ここで

$$\alpha_R := (\alpha_{R,0}, \dots, \alpha_{R,n_R}), \quad \alpha_T := (\alpha_{T,0}, \dots, \alpha_{T,n_T})$$

が設計パラメータとなる。

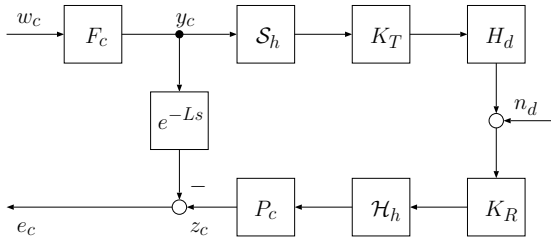


図 3: デジタル通信システムの誤差系。

デジタル通信では通信路や雑音によって劣化した受信信号から元の信号を復元することが必要となる。そこで復元信号 z_c ともとの信号 y_c とを比較するために図 3 のような誤差系を考える。

ここで送受信フィルタによる復元過程にはある程度の時間遅れが許容されるため、もとの信号に時間遅れ要素 e^{-Lhs} を作用させた信号と復元信号とを比較する。

このブロック線図において $(w_c, n_d)^T$ から誤差信号 e_c までの作用素を $(\mathcal{T}_{ew}, \mathcal{T}_{en})$ とおく。このとき送受信フィルタの設計問題を以下のように定式化する。

問題 1 連続時間低域通過フィルタ F_c と P_c , 通信路 H_d , ならびに時間遅れ Lh が与えられたとする。この

とき任意の時変パラメータ θ ならびに、ある正数 $\gamma > 0$ にたいして

$$\|(\mathcal{T}_{ew}, \mathcal{T}_{en})\|_\infty^2 := \sup_{\substack{w_c \in L^2, n_d \in l^2 \\ \theta \in \Theta}} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2} < \gamma^2$$

を満足するような K_R を求めよ。

3 設計問題の分割

問題 1 は送受信フィルタの同時設計問題であるが、ここでは文献 [3] と同様に受信フィルタを設計した後に送信フィルタを設計する 2 段階設計法を行う。送信フィルタ K_T では雑音 n_d を除去することができないので雑音除去は受信フィルタ K_R によって行う。受信フィルタは雑音除去以外に劣化した信号の復元も行う必要がある。そのためもとの信号を復元しつつ雑音を除去するような受信フィルタの設計を行い (図 4), 得られた受信フィルタを用いて送信フィルタを設計する (図 5)。

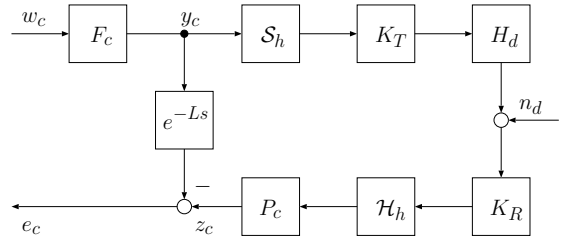


図 4: 受信フィルタ設計の誤差系

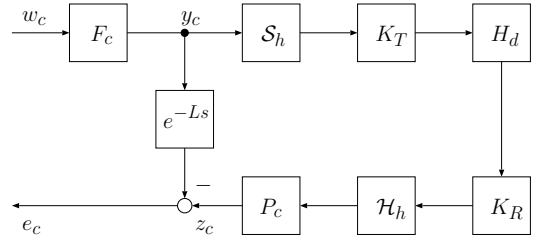


図 5: 送信フィルタ設計の誤差系

問題 2 設計 1: 図 4 の誤差系にたいし

$$\|\mathcal{T}_R\|_\infty^2 := \sup_{\substack{w_c \in L^2, n_d \in l^2 \\ \theta \in \Theta}} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2} < \gamma^2$$

を満足するような K_R を求めよ。

設計 2: 図 5 の誤差系にたいし

$$\|\mathcal{T}_T\|_\infty^2 := \sup_{w_c \in L^2, \theta \in \Theta} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2} < \gamma^2$$

を満足するような K_T を求めよ。

4 近似離散時間問題への帰着

問題 2 は連続時間と離散時間との混在するサンプル値系の設計問題となるがファーストサンプルファーストホールド近似手法 [5] を用いることにより近似離散時間系におけるフィルタ設計問題に帰着される。

ファーストサンプルファーストホールド近似手法とは、周期 h のサンプル値系の連続時間入出力 w_c, e_c を周期 h/N (N は自然数) で動作するサンプラと零次ホールドによって離散化し、離散時間信号 w_d, e_d により近似する方法である。さらに離散時間リフティング \mathbf{L}_N を用いて $\tilde{w}_d := \mathbf{L}_N(w_d)$, $\tilde{e}_d := \mathbf{L}_N(e_d)$ と変換する。このとき十分大きな N にたいして $\|w_c\|_{L^2} \approx \sqrt{h/N} \|\tilde{w}_d\|_{l^2}$, $\|e_c\|_{L^2} \approx \sqrt{h/N} \|\tilde{e}_d\|_{l^2}$ が成立する。また雑音 n_d にたいしてスケーリング $\tilde{n}_d := \sqrt{N/h} n_d$ を行う。

上記の関係式を用い、 w_c, e_c, n_d を離散時間信号 $\tilde{w}_d, \tilde{e}_d, \tilde{n}_d$ に置き換えることで $\|T_R\|_\infty, \|T_T\|_\infty$ の近似評価を得ることができ、問題 2 は以下の近似離散時間問題に帰着される。

問題 3 近似設計 1:

$$\|T_R\|_\infty^2 := \sup_{\substack{\tilde{w}_d, \tilde{n}_d \in l^2, \\ \theta \in \Theta}} \frac{\|\tilde{e}_d\|_{l^2}^2}{\|\tilde{w}_d\|_{l^2}^2 + \|\tilde{n}_d\|_{l^2}^2} < \gamma^2$$

を満足するような K_R を求めよ。

近似設計 2:

$$\|T_T\|_\infty^2 := \sup_{\tilde{w}_d \in l^2, \theta \in \Theta} \frac{\|\tilde{e}_d\|_{l^2}^2}{\|\tilde{w}_d\|_{l^2}^2} < \gamma^2$$

を満足するような K_T を求めよ。

近似離散時間系 T_R, T_T の伝達関数を以下に示す。

$$T_R := \sum_{i=1}^r \theta_i T_{R,i}, \quad T_{R,i} := G_{11R} + G_{12R} K_R G_{21R,i},$$

$$T_T := \sum_{i=1}^r \theta_i T_{T,i}, \quad T_{T,i} := G_{11T} + G_{12T,i} K_T G_{21T},$$

$$G_{11R} := \begin{pmatrix} z^{-L} F_d & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{11T} := z^{-L} F_d,$$

$$G_{12R} := -P_d, \quad G_{12T,i} := -P_d K_R H_{d,i},$$

$$G_{21R,i} := \begin{pmatrix} H_{d,i} K_T F_d & \sqrt{h/N} \end{pmatrix}, \quad G_{21T} := F_d,$$

$$F_d := \mathbf{L}_N S_{h/N} F_c \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1},$$

$$P_d := \mathbf{L}_N S_{h/N} P_c \mathcal{H}_{h/N} \mathbf{L}_N^{-1} H_N,$$

$$H_N := (1, \dots, 1)^T, \quad i = 1, \dots, r.$$

ここで F_d, P_d はそれぞれ N 入力 N 出力, 1 入力 N 出力の離散時間時不変システムとなる。例えば F_c の状

態空間実現を (A, B, C, D) とおくと F_d の状態空間表現は以下で与えられる:

$$F_d = \left(\begin{array}{c|ccc} \tilde{A}^N & \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \dots & \tilde{B} \\ C & D & 0 & \dots & 0 \\ C \tilde{A} & C \tilde{B} & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & C \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & C \tilde{A}^{N-3} \tilde{B} & \dots & D \end{array} \right),$$

$$\tilde{A} := e^{Ah/N}, \quad \tilde{B} := \int_0^{h/N} e^{A\tau} B d\tau.$$

5 線形行列不等式による可解条件の導出

本節では近似問題 3 にたいして線形行列不等式による可解条件を与える。可解条件は有界実補題を直接適用することで無限個の線形行列不等式によって特徴づけることができるが、この数値計算を実行するのは困難である。しかし時変システムの各システム行列は定数行列の凸結合として表すことができることから、十分条件として有限個の線形行列不等式によって特徴づけることができる。

まず $T_{R,i}, T_{T,i}$ を設計パラメータ α_R, α_T に関して線形な系に変換する。

補題 1 適当な時不変離散時間システム $T_{1R}, T_{1T}, T_{2R,i}, T_{2T,i}$ 並びに α_R, α_T にたいしそれぞれ線形な定数行列 $W(\alpha_R), W(\alpha_T)$ が存在して

$$T_{R,i} = T_{1R} + W(\alpha_R) T_{2R,i},$$

$$T_{T,i} = T_{1T} + W(\alpha_T) T_{2T,i},$$

$$i = 1, \dots, r$$

と表すことができる。

証明 K_R における α_R を分離するために

$$K_R = \alpha_R V, \quad V := \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-n_R} \end{pmatrix}^T$$

と表す。これによって $T_{R,i}$ は次の式で表すことができる。

$$T_{R,i} = G_{11R,i} + G_{12R,i} \alpha_R V G_{21R,i}.$$

さらに α_R に関して線形な系へと変換を行う。

$$\begin{aligned} G_{12R,i} \alpha_R &= (\alpha_{R,0} G_{12R,i}, \dots, \alpha_{R,n_R} G_{12R,i}) \\ &= (\alpha_{R,0} I_N, \dots, \alpha_{R,n_R} I_N) \text{diag}(G_{12R,i}, \dots, G_{12R,i}) \\ &=: W(\alpha_R) G'_{12R,i}. \end{aligned}$$

ただし I_N は N 次の単位行列である。ここで $T_{1R} := G_{11R}, T_{2R,i} := W(\alpha_R) G'_{12R,i} G_{21R,i}$ とすると求めるべき等式となる。□

離散時間系 T_{1R}, T_{1T} と $T_{2R,i}, T_{2T,i}$ の状態空間実現を次式で表す:

$$T_{1R} =: \left(\begin{array}{c|c} A_{1R} & B_{1R} \\ \hline C_{1R} & D_{1R} \end{array} \right), T_{2R,i} =: \left(\begin{array}{c|c} A_{2R,i} & B_{2R,i} \\ \hline C_{2R,i} & D_{2R,i} \end{array} \right),$$

$$T_{1T} =: \left(\begin{array}{c|c} A_{1T} & B_{1T} \\ \hline C_{1T} & D_{1T} \end{array} \right), T_{2T,i} =: \left(\begin{array}{c|c} A_{2T,i} & B_{2T,i} \\ \hline C_{2T,i} & D_{2T,i} \end{array} \right),$$

$$i = 1, \dots, r.$$

このとき系 $T_{R,i}, T_{T,i}$ の状態空間実現は補題 1 を用いることにより次式で表すことができる:

$$T_{R,i} := \left(\begin{array}{c|c} A_{R,i} & B_{R,i} \\ \hline C_{R,i}(\alpha_R) & D_{R,i}(\alpha_R) \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} A_{1R} & 0 & B_{1R} \\ 0 & A_{2R,i} & B_{2R,i} \\ \hline C_{1R} & W(\alpha_R)C_{2R,i} & D_{1R} + W(\alpha_R)D_{2R,i} \end{array} \right),$$

$$T_{T,i} := \left(\begin{array}{c|c} A_{T,i} & B_{T,i} \\ \hline C_{T,i}(\alpha_T) & D_{T,i}(\alpha_T) \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} A_{1T} & 0 & B_{1T} \\ 0 & A_{2T,i} & B_{2T,i} \\ \hline C_{1T} & W(\alpha_T)C_{2T,i} & D_{1T} + W(\alpha_T)D_{2T,i} \end{array} \right),$$

$$i = 1, \dots, r.$$

ここで $C_{R,i}(\alpha_R), D_{R,i}(\alpha_R), C_{T,i}(\alpha_T), D_{T,i}(\alpha_T)$ はそれぞれ α_R, α_T に関してアフィンな行列となる.

ポリティック LPV システムの有界実補題 [2] を直接用いることで問題 3 の解が存在するための十分条件として線形行列不等式による表現が得られる.

定理 1 以下の $r+1$ 個の線形行列不等式を満足するような α_R 行列 X_R が存在するならば, そのような α_R は近似設計問題 1 の解となる.

$$X_R = X_R^T > 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc} A_{R,i}^T X_R A_{R,i} - X_R & A_{R,i}^T X_R B_{R,i} & C_{R,i}^T(\alpha_R) \\ B_{R,i}^T X_R A_{R,i} & B_{R,i}^T X_R B_{R,i} - \gamma I & D_{R,i}^T(\alpha_R) \\ C_{R,i}(\alpha_R) & D_{R,i}(\alpha_R) & -\gamma I \end{array} \right) < 0,$$

$$i = 1, \dots, r.$$

さらに, 以下の $r+1$ 個の線形行列不等式を満足するような α_T 行列 X_T が存在するならば, そのような α_T は近似設計問題 2 の解となる.

$$X_T = X_T^T > 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc} A_{T,i}^T X_T A_{T,i} - X_T & A_{T,i}^T X_T B_{T,i} & C_{T,i}^T(\alpha_T) \\ B_{T,i}^T X_T A_{T,i} & B_{T,i}^T X_T B_{T,i} - \gamma I & D_{T,i}^T(\alpha_T) \\ C_{T,i}(\alpha_T) & D_{T,i}(\alpha_T) & -\gamma I \end{array} \right) < 0,$$

$$i = 1, \dots, r.$$

注意 1 通信路のモデルが複雑な場合や, 設計フィルタの次数を高くとる必要のある場合などは, LMI のサイズが大きくなり, 数値計算が困難となる場合がある. このような場合には, 十分条件ではあるが, 制約付きの切除平面法による解法が有効である [6].

6 おわりに

本論文では時変通信路にたいするデジタル通信システムでの送受信フィルタの設計法を示した. 通信路のモデルを時不変離散時間系の凸結合と定義し, サンプル値制御問題として定式化を行い, 線形行列不等式による可解条件を求めた.

提案法によって得られるフィルタは, 時変通信路の変動をすべて考慮して設計された時不変なフィルタである. しかし, 無線通信など通信路の変動が非常に大きい場合, この設計では保守的すぎて十分な性能を得ることは難しい. したがって, このような大きな変動にも対応するために, 適応フィルタの設計を考えるのが今後の課題である.

参考文献

- 1) P. Apkarian and P. Gahinet, "A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 5, pp. 853–864, 1994.
- 2) P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker, "Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example," *Automatica*, vol. 31, no. 9, pp. 1251–1261, 1995.
- 3) 永原, 山本, "デジタル通信システムのサンプル値 H^∞ 設計," システム制御情報学会論文誌, Vol. 16, No. 1, pp. 38–43, 2003.
- 4) J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, 1995.
- 5) Y. Yamamoto, A. G. Medievski and B. D. O. Anderson, "Computation and convergence of frequency response via fast sampling for sampled-data control systems," *Automatica*, vol. 35, no. 4, pp. 729–734, 1999.
- 6) 安福, "時変要素を含むサンプル値制御系とその最適設計," 京都大学大学院情報学研究所修士論文, 2003.