

# 量子化を含むサンプル値制御系の解析と量子化器設計

## An analysis for sampled-data systems with quantization and quantizer design

京都大学大学院 情報学研究科 永原 正章, 芦田 信二郎, 山本 裕

M. Nagahara, S. Ashida, Y. Yamamoto

Graduate School of Informatics, Kyoto University

**Abstract** In digital control, we have to quantize the signal. Since quantizing is a nonlinear operation, its analysis is difficult. Often we linearize the quantizer by an additive noise model. We study a stability and performance analysis of sampled-data systems with quantization which is designed by using the linearization. We show that if the linear model is stable, the states of the real system are bounded, and if the linear model has small  $L^2$  gain, the real system has small power gain. We apply the results to the design for a quantizer which is called differential pulse code modulation(DPCM).

### 1 はじめに

デジタル制御系においては、アナログ信号がA/D変換器によりデジタル信号に変換されて信号が処理される。そのアナログ信号からデジタル信号への変換には、時間を離散化する標本化と振幅を離散化する量子化が必要である。標本化は線形変換であるため扱いが比較的容易であるが、量子化は非線形変換であり、その取り扱いは難しい。そこで量子化の操作を付加雑音でモデル化し、量子化を含むシステムを線形化する手法が従来より用いられてきた [2]。しかし、この線形化モデルにたいして設計を行なったさい、もとの非線形システムにたいしてはどのような性質が成り立つのかという議論はこれまであまりなされていない。

そこで本稿では、この付加雑音モデルを用いて設計されたサンプル値制御系の安定性と性能の解析を行なう。まず付加雑音モデルが安定であれば、もとのサンプル値制御系の状態は有界な領域にとどまることを示す。次に付加雑音から出力までのシステムの  $H^\infty$  ノルムが小さければ、もとのサンプル値制御系の出力はパワーノルムの意味で小さいことを示し、付加雑音モデルにたいする  $H^\infty$  設計が有効であることを示す。

次にこれらの結果を予測量子化器 [3] の設計に応用する。従来の設計は系の安定性に関して厳密な議論がなかったが、上の結果を用いることにより安定性および性能に関する議論が可能となる。

本稿では連続信号  $z$  および離散時間信号  $z_d$  のパワーをそれぞれ以下で定義する。連続時間信号にたいして

$$\text{pow}(z)^2 := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |z(t)|^2 dt.$$

離散時間信号にたいして

$$\text{pow}(z_d)^2 := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N |z_d[k]|^2.$$

### 2 量子化を含むサンプル値制御系の解析

#### 2.1 量子化器の付加雑音モデル

図1に量子化を含むサンプル値制御系のブロック線図を示す。この図で  $Q$  は量子化レベル  $\Delta$  の一様量子化

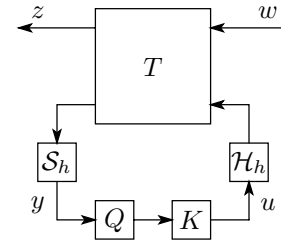


図1: 量子化を含むサンプル値系のブロック線図。

とし、また  $K(z)$  は離散時間コントローラである。コントローラの  $K(z)$  の実現を  $\{A_K, B_K, C_K, D_K\}$  とおく。また

$$T := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} =: \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

とする。

次に量子化器にたいして付加雑音モデルを用いる。すなわち一様量子化器  $Q$  を次のようにモデル化する。

$$Q: \hat{u} = u + d, \quad \|d\|_\infty \leq \Delta/2.$$

ここで  $\|d\|_\infty = \|u - \hat{u}\|_\infty \leq \Delta/2$  が成立することより、付加雑音モデルは一様量子化の入出力関係を帯状の領域でおおうモデルであることがわかる (図 2 参照)。

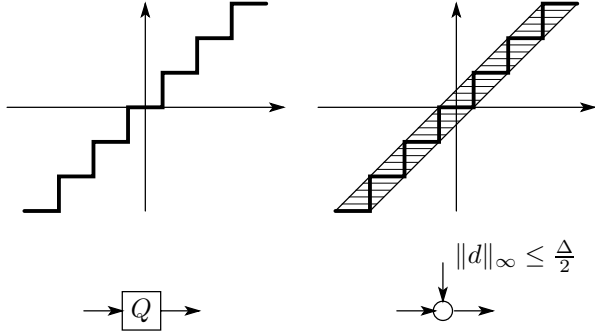


図 2: (左) 一様量子化, (右) 付加雑音モデル.

## 2.2 量子化を含むサンプル値制御系の安定性

閉ループ系の安定性を調べるため、ここでは図 3 のシステムを考える。ここで  $S_h T_{22} \mathcal{H}_h K$  は離散時間システム

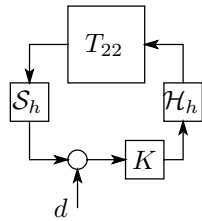


図 3: 閉ループ系のブロック線図.

$\Delta$  であり、その実現を  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$  とおく。このとき図 3 の付加雑音モデルの状態空間表現は以下になる。

$$x[n+1] = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})x[n] + \tilde{B}d[n] \quad (1)$$

もし量子化が存在しない、すなわち  $d = 0$  ならば、フィードバック系の安定性は (1) の行列  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}$  の安定性を調べることにより容易に判別できる。このとき、図 1 の量子化を含むサンプル値系の安定性に関して次の定理が成り立つ。

**定理 1** 行列  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}$  を安定行列とする。このとき、(1) の状態空間モデルにおいて次の性質が成り立つ。

- 任意の初期値  $x[0]$  と任意の時刻  $n$  にたいして

$$\begin{aligned} & \|x[n] - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})^n x[0]\| \\ & \leq \frac{(1 - \|\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\|^n) \|\tilde{B}\|}{1 - \|\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\|} \cdot \frac{\Delta}{2} =: r_n. \end{aligned} \quad (2)$$

- 任意の初期値  $x[0]$  にたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x[n]\|_\infty \leq \frac{\|\tilde{B}\|}{1 - \|\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\|} \cdot \frac{\Delta}{2} =: r_\infty. \quad (3)$$

証明 (1) より

$$\begin{aligned} \|x[n] - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})^n x[0]\| &= \left\| \sum_{k=1}^n (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})^{n-k} \tilde{B}d[k] \right\| \\ &\leq \frac{\Delta}{2} \|\tilde{B}\| \sum_{k=1}^n \|\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}\|^{n-k} \\ &= r_n. \end{aligned} \quad (4)$$

したがって (2) が成り立つ。また行列  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}$  は安定であるから、任意の  $x[0]$  にたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})^n x[0] = 0.$$

したがって (4) にたいして  $n$  について極限をとれば (3) が成り立つことがわかる。□

この定理より、付加雑音を用いた線形モデルにたいして安定化すれば、もとの図 1 の量子化を含むサンプル値制御系にたいして、上の定理で示したような弱い意味での安定性が保証されることがわかる。

## 2.3 量子化を含むサンプル値制御系の性能

前節までで述べた付加雑音モデルを用いて、量子化雑音  $d$  を外乱とみなして  $H^\infty$  設計を行なうことを考える。図 1 において入力  $w$  から出力  $z$  までのシステムを  $T_{zw}$ 、付加雑音  $d$  から出力  $z$  までのシステムを  $T_{zd}$  とおく。このとき  $[w, d]^T$  から  $z$  までのシステムにたいしてサンプル値  $H^\infty$  設計を行ない、

$$\|T_{zw}\|_\infty = \gamma_1, \quad \|T_{dw}\|_\infty = \gamma_2$$

が得られているものとする。このとき、図 1 のもとのサンプル値系においてどのような性能が保証されるかをここでは述べる。

このとき次の定理が成り立つ。

**定理 2** サンプル値系  $[T_{zw}, T_{zd}]$  の出力  $z$  にたいして

$$\text{pow}(z) \leq \frac{\gamma_2 \Delta}{2}.$$

証明 まず  $T_{zw}w$  は  $L^2$  信号であるから  $\text{pow}(T_{zw}w) = 0$  が成り立つ。また一般に  $\|d\|_\infty \leq 1$  ならば  $\text{pow}(d) \leq 1$  であるから

$$\sup_{\|d\|_\infty \leq 1} \text{pow}(T_{zd}d) \leq \sup_{\text{pow}(d) \leq 1} \text{pow}(T_{zd}d)$$

が成り立つ．これと付録に示す補題を用いれば

$$\sup_{\text{pow}(d) \leq 1} \text{pow}(T_{zd}d) \leq \|T_{zd}\|_{\infty} \|d\|_{\infty}$$

が成り立ち，以上より

$$\begin{aligned} \text{pow}(z) &= \text{pow}(T_{zw}w + T_{zd}d) \\ &\leq \text{pow}(T_{zw}w) + \text{pow}(T_{zd}d) \\ &= \text{pow}(T_{zd}d) \leq \|T_{zd}\|_{\infty} \|d\|_{\infty} \leq \frac{\gamma_2 \Delta}{2}. \end{aligned}$$

となる．□

この定理より，線形化モデルにたいして量子化雑音  $d$  を外乱とみなして  $H^{\infty}$  設計を行なったとき， $\|T_{zd}\|_{\infty}$  が十分小さければ，もとのサンプル値系の出力  $z$  もパワーの意味で小さくなるのがわかる．すなわち，付加雑音モデルにたいする  $H^{\infty}$  設計が有効であることがわかる．

### 3 予測量子化器の設計

#### 3.1 予測量子化器

予測量子化は電話回線などにおいて，標準化された信号を量子化するときに行われる．予測量子化のブロック線図を図4に示す．エンコーダ部分において，入力信号  $r$  を量子化する代わりに出力信号  $\hat{e}$  から予測器  $K_1(z)$  により  $r$  の予測値  $u$  を生成し， $r$  との差信号  $e = r - u$  を量子化する．ただし  $Q$  は量子化レベル  $\Delta$  が一定の一様量子化器である．適切に入力信号を予測することができれば，信号  $e$  の振幅を低減することができ，量子化ビット数を低減することが可能となる．

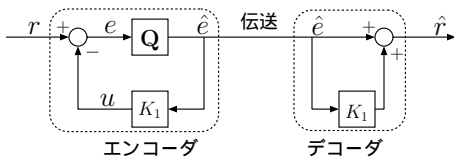


図4: 予測量子化器のブロック線図 (  $Q$  は一様量子化器)

伝送信号  $\hat{e}$  はデコーダ部分において信号  $\hat{r}$  に復元される．復元に際しエンコーダにおいて用いた予測器と同じものを用いると (図4参照)，復元誤差に関して

$$|\hat{r} - r| = |\hat{e} - e| \leq \Delta/2$$

が成立する．すなわち誤差  $\Delta/2$  以下で入力信号  $r$  を復元することができる．従って予測量子化を行うことにより，信号の復元誤差を抑えつつ伝送するビット数を低減することができる．

しかしこのモデルは信号  $\hat{e}$  に加わる伝送雑音を考慮しておらず，実際には上式は成立しない．たとえば  $\Delta$  変調では， $K_1$  として積分器  $K_1(z) = 1/(z-1)$  が用いられるが，この  $K_1(z)$  は不安定であるため，伝送経路において雑音を加わればデコーダ側で雑音が増幅されるという問題が生じる．そこで本稿では伝送雑音を考慮したモデルを設定し，伝送経路における雑音を除去するようなデコーダをエンコーダとは独立に設計することを提案する．その設計にはサンプル値  $H^{\infty}$  最適制御を用いる．

#### 3.2 設計問題

伝送雑音を考慮した予測量子化器のモデルを図5に示す．信号  $n$  が伝送雑音である．設計目標は量子化する信号  $e$  の振幅の低減と入力信号の復元誤差  $|\hat{r} - r|$  の低減である．そこで図5における補償器  $K_1(z), K_2(z)$  の設計問題を線形システムのサンプル値  $H^{\infty}$  最適制御問題に変換する．

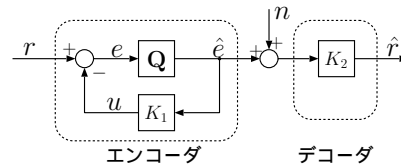


図5: 伝送雑音を考慮したモデル

設計のための誤差系を図6に示す．まず量子化  $Q$  に

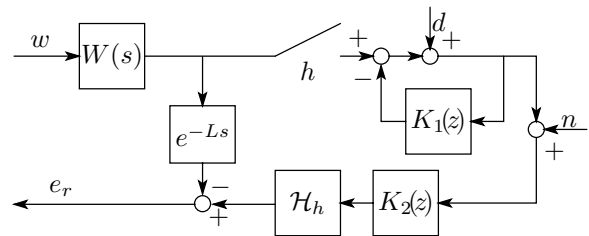


図6: 補償器設計のための誤差系

よる誤差を付加雑音とみなし，新たな入力  $d$  を導入する．次に入力信号  $r$  は低周波成分を多く含むと仮定し，アナログのローパスフィルタ  $W(s)$  を挿入する．また信号の復元に時間遅れを許し  $e^{-Ls}$  を導入する．このとき設計問題は以下のように定式化される：

問題1 図6において  $W(z), F(z), g_d, m$  が与えられたとする．

Step1 入力  $[w, d]^T$  から出力  $e$  までのシステムを  $T_1$  とする． $\|T_1\|_\infty$  を最小化する補償器  $K_1(z)$  を求めよ．

Step2 入力  $[w, d, n]^T$  から出力  $e_r$  までのシステムを  $T_2$  とする． $\|T_2\|_\infty$  を最小化する補償器  $K_2(z)$  を求めよ．

この問題はサンプル値  $H^\infty$  最適制御問題であり，ファーストサンプルファーストホールド (FSFH)[5] 等の手法を用いることにより解を得ることができる．

#### 4 おわりに

本稿では，量子化器を付加雑音モデルであらわし，その線形モデルにたいして設計されたサンプル値制御系の安定性と性能の解析を行なった．本稿の定理を用いることにより，付加雑音を外乱とみなしてサンプル値  $H^\infty$  設計を行なったときのサンプル値系の安定性と性能の評価を得ることができる．また量子化を含むサンプル値制御系の設計に  $H^\infty$  設計が有効であることを示した．さらにこれらの結果をもとに，予測量子化器の設計問題を定式化した．この設計問題は標準的なサンプル値  $H^\infty$  設計問題であり FSFH 近似などを用いることにより解が得られる．

#### 参考文献

- [1] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell Macmillan (1992)
- [2] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems 3rd Ed.*, Addison Wesley (1998)
- [3] J. G. Proakis: *Digital Communications*, McGraw Hill (1989)
- [4] Y. Yamamoto and P. P. Khargonekar, Frequency response of sampled-data systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-41**, pp. 166–176 (1996)
- [5] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems, *Automatica*, **vol. 35**, pp. 729-734 (1999)

## A 付録

ここでは次の補題を証明する．

**補題 1** 安定なサンプル値系  $G$  を考える．リフティングされた任意の信号  $u \in L^2_{(0,h)}$  にたいして次の不等式が成り立つ．

$$\text{pow}(Gu) \leq \|G\|_\infty \text{pow}(u)$$

ここで，リフティングされた連続時間信号にたいするパワーを次式で定義する．

$$\text{pow}(z)^2 := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N \|z[k]\|^2.$$

**証明** まず信号  $u \in L^2_{(0,h)}$  にたいして自己相関関数  $R_u$  およびその Fourier 変換であるパワー密度関数  $S_u$  を定義する．

$$R_u[k] := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N \langle u[n], u[n+k] \rangle$$

$$S_u(e^{j\omega h}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_u[k] e^{-j\omega h k}$$

ただし  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $L^2_{(0,h)}$  における内積をあらわす．このとき次式が成り立つ．

$$\text{pow}(u)^2 = R_u[0] = \frac{h}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{h}} S_u(e^{j\omega h}) e^{j\omega h k} d\omega \quad (5)$$

サンプル値系  $G$  を考え，その周波数応答 [4] を  $G(e^{j\omega h}) : L^2_{(0,h)} \rightarrow L^2_{(0,h)}$  とおく．このサンプル値系  $G$  の出力を  $y = Gu$  とおくと次の式が成り立つ．

$$S_y(e^{j\omega h}) = G(e^{j\omega h}) G^*(e^{j\omega h}) S_u(e^{j\omega h}) \quad (6)$$

ここで  $G^*$  はサンプル値系  $G$  の双対システム [4] である．この式の証明は信号  $u$  および  $y$  が関数空間  $L^2_{(0,h)}$  に値をとることに注意すれば，連続時間システムにたいする同様の結果の証明 [1] とほぼ同じ手順で行なうことができる．(5) と (6) を用いれば

$$\begin{aligned} \text{pow}(y)^2 &= \frac{h}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{h}} S_y(e^{j\omega h}) d\omega \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{h}} \|G(e^{j\omega h})\|^2 S_u(e^{j\omega h}) d\omega \\ &\leq \sup_{\omega \in (0, 2\pi/h)} \|G(e^{j\omega h})\|^2 \text{pow}(u)^2 \\ &= \|G\|_\infty^2 \text{pow}(u)^2. \end{aligned}$$

□

**注意 1** 第 2 章で用いたような離散入力 / 連続出力のサンプル値系にたいしても，関数空間の取り方を変えるだけで上と同様の議論が成り立つ．