

# ディジタル通信システムのサンプル値 $H^\infty$ 設計

## Sampled-data $H^\infty$ Design for Digital Communication Systems

京都大学大学院 情報学研究科 ○ 永原 正章, 山本 裕

Masaaki Nagahara, Yutaka Yamamoto

Graduate School of Informatics, Kyoto University

**Abstract** A design procedure for digital communication systems is developed based on the sampled-data  $H^\infty$  control theory. The procedure provides transmitting/receiving filters, which optimize an analog optimal performance. Furthermore, the trade-off between the attenuation of the reconstruction error and the energy of the transmitting signal is considered by the  $H^\infty$  design with an appropriate weighting function. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

### 1 はじめに

インターネットや携帯電話等の急速な発展により、ディジタル通信の重要性はますます大きくなってきている。ディジタル通信では、音声や画像などアナログの情報源は、標本化されたのちに送信装置によって通信路に送られる。従来のディジタル通信では、情報源の連続時間特性に着目することなく、ディジタル通信システム全体を離散時間システムととらえて設計が行われている。すなわち、情報源のアナログ信号がナイキスト周波数以下に完全に帯域制限されていると仮定し、標本化の影響を無視して議論が進められることが多い。しかし実際には完全帯域制限の仮定は成り立たず、ナイキスト周波数以上の成分が情報源には含まれるはずである。したがって、より精密なディジタル通信システムの設計をおこなうためにはもとのアナログ信号の特性をも考慮する必要がある。

この問題にたいして文献 [4] では、ディジタル通信システムの設計にサンプル値制御理論を導入し、連続時間特性を考慮した送受信フィルタの設計手法が提案されている。しかし、この手法を用いて設計された送信フィルタはハイゲインとなる傾向があり、送信コストを考慮すれば送信信号が大きくなることは望ましくない。そこで本研究では、重み関数を用いた  $H^\infty$  制御によって、送信信号の大きさの抑制と復元誤差の減少を同時に考慮する設計を提案する。この設計はむだ時間を含む無限次元サンプル値系の設計問題として定式化されるが、ファーストサンプル・ファーストホールド (FSFH) 近似手法 [3, 7] を用いて近似離散時間系の設計問題に帰着される。また設計例を用いて、離散時間領域での設計および送信信号の大きさを考慮しない設計 [4] と比較し、提案手法の有効性を示す。

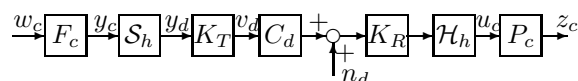


図 1: ディジタル通信システム

### 2 設計問題

ディジタル通信システムのブロック線図を図 1 に示す。連続時間信号  $w_c \in L^2[0, \infty)$  にたいして連続時間ローパスフィルタ  $F_c(s)$  を作用させ信号  $y_c$  を得る。この  $F_c(s)$  は、伝送すべきアナログ信号の先見情報であると考えることができる。パルス振幅変調 (PAM) やパルス符号変調 (PCM) [5] では、周期  $h$  で動作する理想サンブラ  $S_h$  によって連続時間信号  $y_c$  が離散時間信号  $y_d$  に変換される。そして、離散化された信号  $y_d$  は送信フィルタ  $K_T(z)$  を通り通信路  $C_d(z)$  に送信される。

通信路の特性は一般に複雑であり、とくに無線通信などではフェーディング [5] と呼ばれる非線形現象がみられるが、ここでは簡単のため通信路を LTI モデル  $C_d(z)$  であらわす。この通信路  $C_d(z)$  の後に雑音  $n_d$  が加わる<sup>1</sup>。

雑音を含んだ受信信号は受信フィルタ  $K_R(z)$  を通り、周期  $h$  で動作する 0 次ホールドにより連続信号に変換されたのち、アナログフィルタ  $P_c(s)$  により平滑化されて出力信号  $z_c$  が得られる。

ディジタル通信では、送受信フィルタ  $K_T(z)$  および  $K_R(z)$  を用いて、通信路および付加雑音によって劣化した受信信号  $z_c$  からもとの信号  $y_c$  を忠実に再現する必要がある。したがって、これらのフィルタによる復元信号  $z_c$  ともとの信号  $y_c$  を比較するために図 2 の誤差

<sup>1</sup>PCM では  $y_d$  にたいして量子化や符号化の操作が加わるが、本稿ではそれらの影響を通信路に加わる雑音  $n_d$  とみなして設計を行なう。

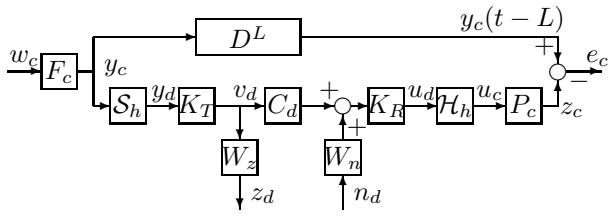


図 2: フィルタ設計のための誤差系

系を考える．ここで送受信フィルタによる復元過程にはある程度の時間遅れが許されるため，むだ時間要素  $(D^L y_c)(t) := y_c(t - L)$  が用いられる．このとき設計問題は以下のように定式化される:

**問題 1** 安定かつ厳密にプロパな  $F(s)$ ，安定かつプロパな  $P(s)$ ，安定な重み関数  $W_n(z)$ ， $W_z(z)$ ，安定な通信路  $C_d(z)$ ，むだ時間  $L$  が与えられたとする．このとき

$$J^2 := \sup_{w_c \in L^2, n_d \in l^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2 + \|z_c\|_{l^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2}$$

を最小化する  $K_T(z)$  と  $K_R(z)$  を求めよ．

### 3 設計アルゴリズム

#### 3.1 設計問題の分割

文献 [4] と同様，問題を送信フィルタの設計問題と受信フィルタの設計問題に分割する:

**Step 1** 図 2 において  $K_T$  を固定し

$$\|T_R\|_\infty^2 := \sup_{w_c \in L^2, n_d \in l^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2 + \|n_d\|_{l^2}^2}$$

を最小化する受信フィルタ  $K_R$  を求めよ．

**Step 2** 図 2 において  $K_R$  を固定し

$$\|T_T\|_\infty^2 := \sup_{w_c \in L^2} \frac{\|e_c\|_{L^2}^2 + \|z_d\|_{l^2}^2}{\|w_c\|_{L^2}^2}$$

を最小化する送信フィルタ  $K_T$  を求めよ．

ここで， $K_T$  の初期値は 1 とし，Step 1 と Step 2 を繰り返す．

#### 3.2 FSFH 近似手法による設計

設計問題 Step 1 および Step 2 は むだ時間  $D^L$  を含み，無限次元のサンプル値系の設計問題となるが，FSFH 近似手法 [3, 7] により有限次元離散時間系の設計問題へ帰着される．

**定理 1** むだ時間を  $L = mh$  ( $m$  は自然数) と仮定する．このとき無限次元サンプル値系  $T_R$ ， $T_T$  にたいして FSFH 近似された有限次元離散時間システム  $T_{R,N} := S_{\frac{h}{N}} T_R \mathcal{H}_{\frac{h}{N}}$ ， $T_{T,N} := S_{\frac{h}{N}} T_T \mathcal{H}_{\frac{h}{N}}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) が存在して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \|T_{R,N}\|_\infty &\rightarrow \|T_R\|_\infty, \\ \|T_{T,N}\|_\infty &\rightarrow \|T_T\|_\infty \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

証明を付録に示す．

### 4 設計例

ここでは以下の設計パラメータを用いた設計例を示す．

$$F(s) := \frac{1}{10s + 1}, \quad P(s) := 1,$$

$$C_d(z) := 1 + 0.65z^{-1} - 0.52z^{-2} - 0.2975z^{-3},$$

$$W_z(z) := r \cdot \frac{z - 1}{z + 0.5}, \quad r = 0.21, \quad W_n(z) := 1.$$

なお，サンプリング周期は  $h = 1$ ，時間遅れは  $L = 2$  とし，FSFH 近似の分割数  $N$  を 4 とする．通信路のモデル  $C_d(z)$  は文献 [2] から引用した．また  $r = 0.21$  は  $\|T_{ew}\|_\infty = -26[\text{dB}]$  となるように試行錯誤的に選んだ．ここで  $T_{ew}$  は図 2 における入力  $w_c$  から誤差  $e_c$  までのシステムをあらわす．

得られた送受信フィルタのゲイン応答を図 3 に示す．比較のため，送信信号を考慮しない設計 [4] (すなわち  $r = 0$ ) および離散時間設計で得られた送受信フィルタを同時に示す．重み関数  $W_z$  を考慮した設計によって送信フィルタのゲインが高周波領域で抑えられていることがわかる．

つぎに，得られた通信システムにたいする性能を見るために  $T_{ew}$  の周波数応答を図 4 に示す．図 4 より離散時間設計に比べサンプル値設計はよい復元性能を示していることがわかる．

つぎに，得られた通信システムにたいするシミュレーションを示す．送信信号として  $w_c(t) = \sin(0.1t)$ ，雑音として  $n_d(k) = \sin(3k)$  を用いる．受信信号  $z_c(t)$  を図 5 (サンプル値設計) と図 6 (離散時間設計) に示す．サンプル値設計された送受信フィルタがもとの送信信号を復元できているのにたいし，離散時間設計では雑音の影響を大きく受けて，信号がうまく復元できていないことがわかる．

### 5 おわりに

本稿ではサンプル値  $H^\infty$  制御を用いて送受信フィルタの設計手法を提案した．アナログ特性を考慮した本設

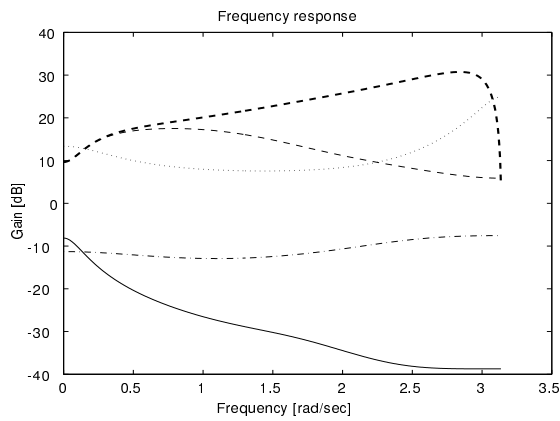


図 3: 送受信フィルタのゲイン応答: サンプル値設計 (受信フィルタ (solid), 送信フィルタ:  $r = 0$  (thick dash),  $r = 0.21$  (thin dash)), 離散時間設計 (受信フィルタ (dash-dot), 送信フィルタ (dot)).

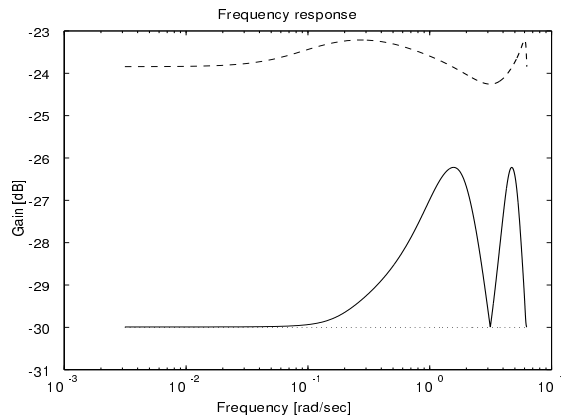


図 4:  $T_{ew}$  の周波数応答: サンプル値設計 ( $r = 0.21$  (solid),  $r = 0$  (dot)), 離散時間設計 (dash).

計は、特に音楽や音声、画像などのアナログ信号の伝送システムに有効と考えられる。

## 参考文献

- [1] T. Chen and B. A. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)
- [2] A. T. Erdogan, B. Hassibi and T. Kailath: On linear  $H^\infty$  equalization of communication channels, *IEEE Trans. on Signal Processing*, **SP-48**, pp. 3227–3232 (2000)
- [3] J. P. Keller and B. D. O. Anderson: A new approach to the discretization of continuous-time

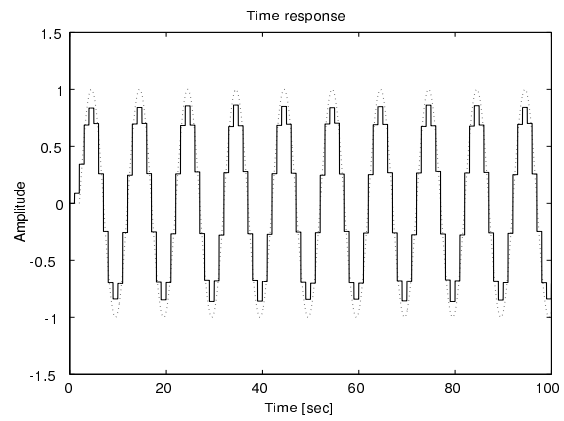


図 5: 時間応答: サンプル値設計

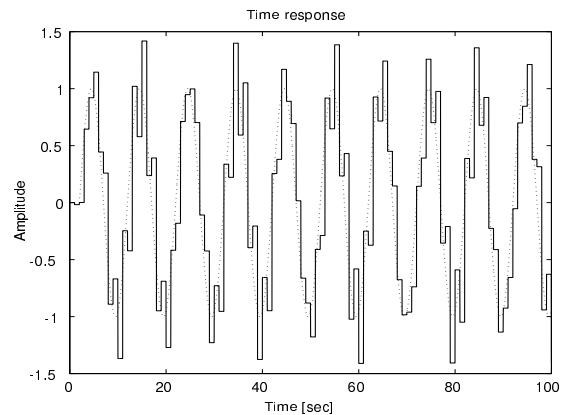


図 6: 時間応答: 離散時間設計

controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-37**, pp. 214–223 (1992)

- [4] 永原, 山本: サンプル値制御によるデジタル通信システムの最適設計, 第 23 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 91–94 (2000)
- [5] J. G. Proakis: *Digital Communications*, McGraw Hill (1989)
- [6] Y. Yamamoto, P. P. Khargonekar: Frequency response of sampled-data systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-41**, pp. 166–176 (1996)
- [7] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems, *Automatica*, **vol. 35**, pp. 729–734 (1999)

## A 付録: 定理 1 の証明

まず次の補題を示す。ここで、システム  $G$  のリフティングによる周波数応答 [6] を  $\underline{G}(\omega)$  で表わす。

**補題 1** 任意の  $\omega \in [-\pi/h, \pi/h]$  と任意の  $w \in U_1 := \{w \in L^2_{[0,h]} : \|w\|_2 \leq 1\}$  にたいして次式が成り立つ。

$$\|(\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} - I) \underline{D}^{mh}(\omega) \underline{F}_c(\omega) w\|_2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (2)$$

**証明**  $\underline{D}^{mh}(\omega) = e^{-j\omega mh}$  であるから、任意の  $\omega \in [-\pi/h, \pi/h]$  と任意の  $w \in U_1$  にたいして

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} - I) \underline{D}^{mh}(\omega) \underline{F}_c(\omega) w\|_2 \\ &= \|(\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} - I) \underline{F}_c(\omega) w\|_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。  $F_c$  が安定かつ厳密にプロパであるから  $(\underline{F}_c w)(\theta)$  は  $[0, h]$  上の一様連続関数となり (2) の収束が成り立つ。 ■

**定理 1 の証明** 証明は、  $w_c$  から  $z_d$  までのシステムおよび  $n_d$  から  $e_c$  までのシステムについては省略し、  $w_c$  から  $e_c$  までのシステムを考える。すなわち

$$T := (D^{mh} - P_c \mathcal{H}_h K S_h) F_c, \quad T_N := \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} T \mathcal{H}_{\frac{h}{N}}$$

とおき  $\|T_N\|_\infty \rightarrow \|T\|_\infty$  ( $N \rightarrow \infty$ ) を示す。ここで  $K := K_R C_d K_T$  である。

証明の手法は文献 [7] とほぼ同様である。まず  $\omega$  を固定し、各  $\omega$  にたいして周波数応答が収束することを示す。簡単のため  $\omega$  を省略し  $\underline{G}(\omega)$  を  $\underline{G}$  と書く。  $\rho := \|\underline{T}\| = \sup_{w \in U_1} \|\underline{T}w\|_2$  とおく。このとき任意の  $\varepsilon > 0$  にたいして、ある  $w_0 \in U_1$  が存在して  $\rho - \varepsilon < \|\underline{T}w_0\|_2 \leq \rho$  が成り立つ。ここで一般性を失わず  $w_0$  は連続関数と仮定できる。補題 1 および文献 [7] の Lemma 4.2 より、ある自然数  $N_0$  が存在して、  $N \geq N_0$  ならば

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} \underline{T}w - \underline{T}w\|_2 &\leq \|(\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} - I) \underline{D}^{mh} F_c w\|_2 \\ &+ \|(\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} - I) P_c \mathcal{H}_h K S_h F_c w\|_2 \leq \varepsilon \quad (3) \end{aligned}$$

が任意の  $w \in U_1$  にたいして成り立つ<sup>2</sup>。さらに  $\underline{T}$  は  $L^2_{[0,h]}$  上の連続線形作用素であるので、ある  $M \geq 0$  が存在して

$$\|T(v - w)\|_2 \leq M \|v - w\|_2 \quad (4)$$

が任意の  $v, w \in U_1$  にたいして成り立つ。また  $w_0$  は閉区間  $[0, h]$  上の連続関数であるから、ある自然数  $N_1$  が

<sup>2</sup>本設計では  $P_c(s)$  をプロパーと仮定しており、文献 [7] の仮定 ( $D_{12} = 0$ ) を満たさない、しかし  $D_{12} \neq 0$  の場合も同様に成り立つ。

存在して、  $N \geq N_1$  ならば

$$\|\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} w_0 - w_0\|_2 \leq \varepsilon \quad (5)$$

が成り立つ。ここで  $N_2 := \max\{N_0, N_1\}$  とおくと、(3)-(5) より任意の  $N \geq N_2$  にたいして

$$\|\mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} \underline{T} \mathcal{H}_{\frac{h}{N}} \mathcal{S}_{\frac{h}{N}} w_0 - \underline{T}w_0\|_2 \leq (1 + M)\varepsilon$$

が得られ、以上より文献 [7] と同様にして

$$\|T_N(\omega)\| \geq \frac{\rho - (M + 2)\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

が示される。これより

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \|T_N(\omega)\| \geq \|\underline{T}(\omega)\|$$

が成り立つことがわかる。また文献 [7] と同様にして、逆の不等式

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \|T_N(\omega)\| \leq \|\underline{T}(\omega)\|$$

も成り立ち、 $\omega$  の各点で周波数応答が収束することがわかる。さらに収束は一様であることも示される。以上より (1) が成り立つことがわかる。 ■

定理 1 における有限次元離散時間系の具体的な公式を以下に示す。ここで  $P(s)$  および  $F(s)$  の状態空間実現を  $(A_F, B_F, C_F, 0)$ ,  $(A_P, B_P, C_P, D_P)$  とおく。またプラント  $G$  とフィルタ  $K$  のフィードバック接続を  $\mathcal{F}_l(G, K)$  と表わす。

$$\begin{aligned} T_{R,N} &:= \mathcal{F}_l(G_{R,N}, K_R), \quad T_{T,N} := \mathcal{F}_l(G_{T,N}, K_T), \\ G_{R,N} &:= \begin{bmatrix} [z^{-m} F_{dN}, 0], & -P_{dN} \\ [C_d K_T J F_{dN}, W_n], & 0 \end{bmatrix}, \\ G_{T,N} &:= \begin{bmatrix} [z^{-m} F_{dN}], & [-P_{dN} K_R C_d] \\ 0, & W_z \\ F_{dN}, & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$F_{dN}(z) :=$$

$$\begin{bmatrix} A_{Fd}^N & A_{Fd}^{N-1} B_{Fd}, & A_{Fd}^{N-2} B_{Fd}, & \dots, & B_{Fd} \\ C_F & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ C_F & C_F B_{Fd}, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_F A_{Fd}^{N-1} & C_F A_{Fd}^{N-2} B_{Fd}, & C_F A_{Fd}^{N-3} B_{Fd}, & \dots, & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{dN}(z) := \begin{bmatrix} A_{Pd}^N & \sum_{k=1}^N A_{Pd}^{N-k} B_{Pd} \\ C_P & D_P \\ C_P A_{Pd} & C_P B_{Pd} + D_P \\ \vdots & \vdots \\ C_P A_{Pd}^{N-1} & \sum_{k=2}^N C_P A_{Pd}^{N-k} B_{Pd} + D_P \end{bmatrix},$$

$$A_{Fd} := e^{A_F \frac{h}{N}}, \quad B_{Fd} := \int_0^{\frac{h}{N}} e^{A_F t} B_F dt,$$

$$A_{Pd} := e^{A_P \frac{h}{N}}, \quad B_{Pd} := \int_0^{\frac{h}{N}} e^{A_P t} B_P dt,$$

$$J := [I, 0, \dots, 0].$$